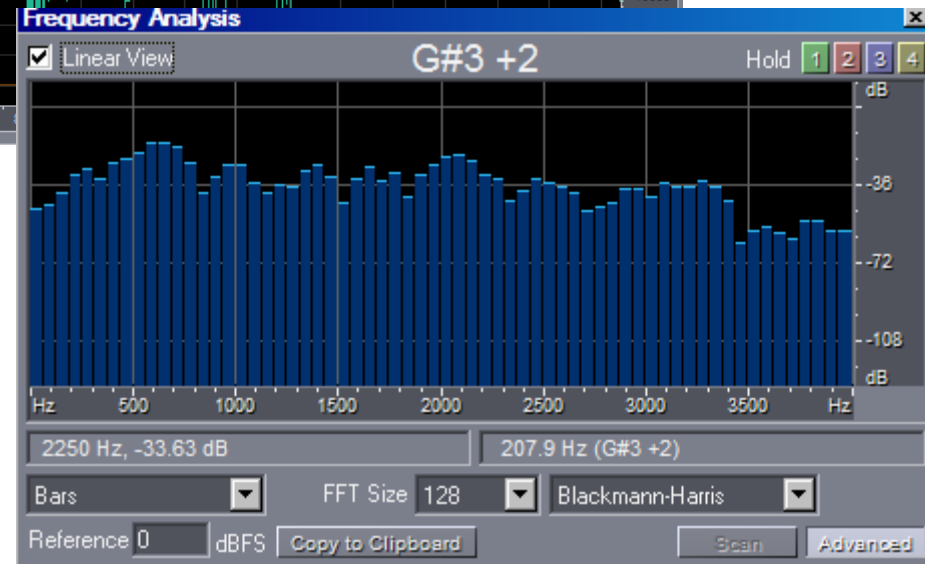
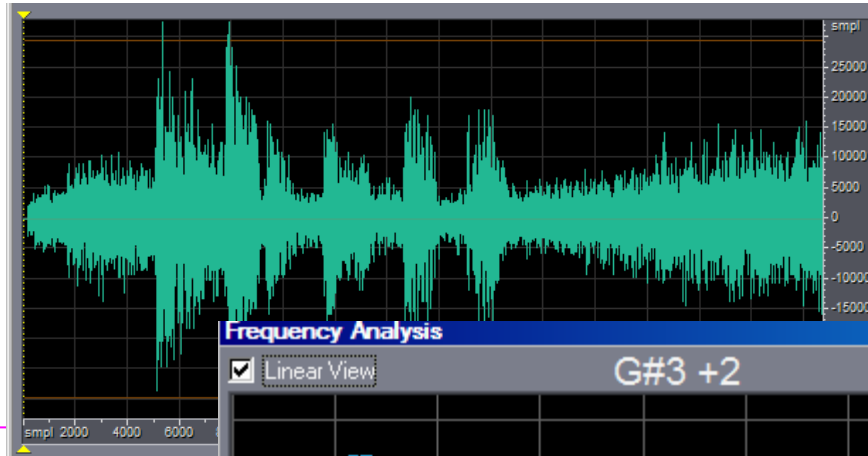


DIGITÁLIS JELFELDOLGOZÁS



0. Jel, rendszer, információ

1. Folytonos idejű rendszerek

Az információtechnika alapfeladatai:

- az információmennyiség meghatározása
 - az információ közlése
 - az információ tárolása
 - az információ feldolgozása
 - az információ algoritmusos védelme
-

Jel:

- információhordozó fizikai jellemző
- matematikailag megadható függvény
- > digitális jelfeldolgozás

Rendszermodellek például:

- lineáris, időinvariáns, folytonos idejű rendszer
- lineáris, időinvariáns, diszkrét idejű rendszer

Jelmodellek például:

- a folytonos idejű jel egy differenciál-egyenlet megoldása
- a folytonos idejű jel szinusz- és koszinusz-függvények összege
- a diszkrét idejű jel egy differencia-egyenlet megoldása
- a diszkrét idejű jel szinusz- és koszinusz-sorozatok összege

A rendszer a jelen „műveletet” végez:

- a bemenő jelből kimenő jelet állít elő (feldolgozza)

A jelek csoportosítása (információtartalom):

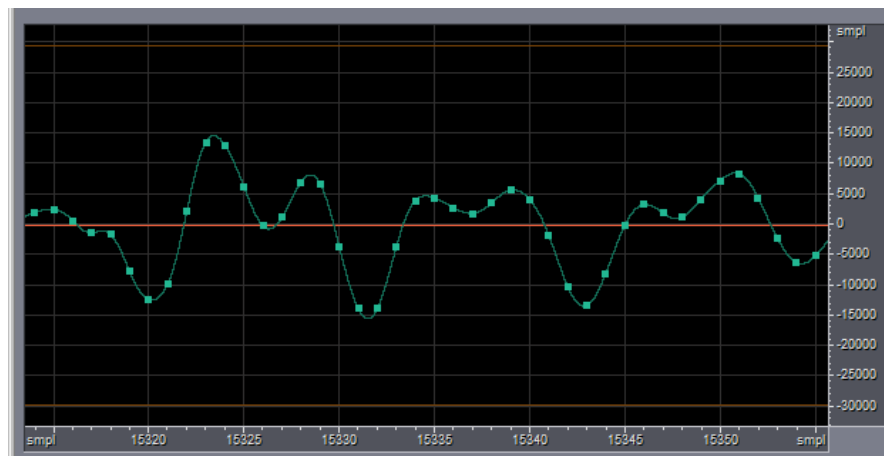
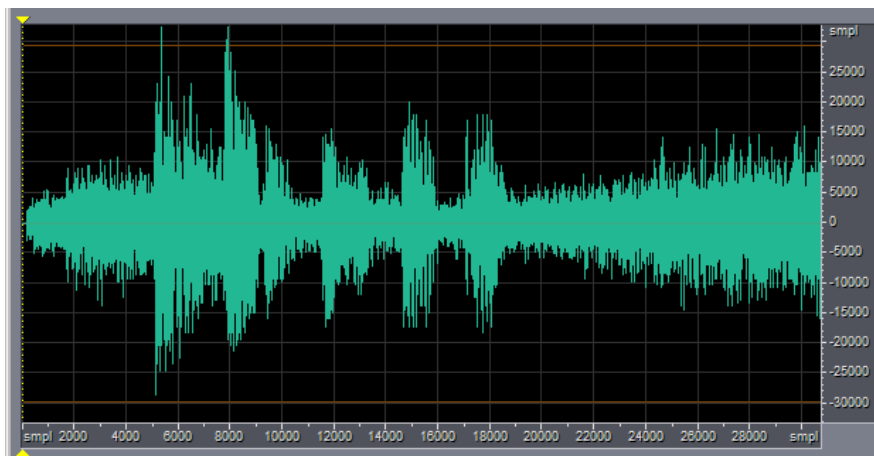
- nagy információtartalmú (üzenet)
 - kis információtartalmú (jelzés)
-

A jelek csoportosítása (analóg/digitális):

- folytonos idejű, folytonos értékészletű
 - folytonos idejű, diszkrét értékészletű
 - diszkrét idejű, folytonos értékészletű
 - diszkrét idejű, diszkrét értékészletű
-

A jelek csoportosítása (jelmodell):

- determinisztikus, sztochasztikus, kaotikus

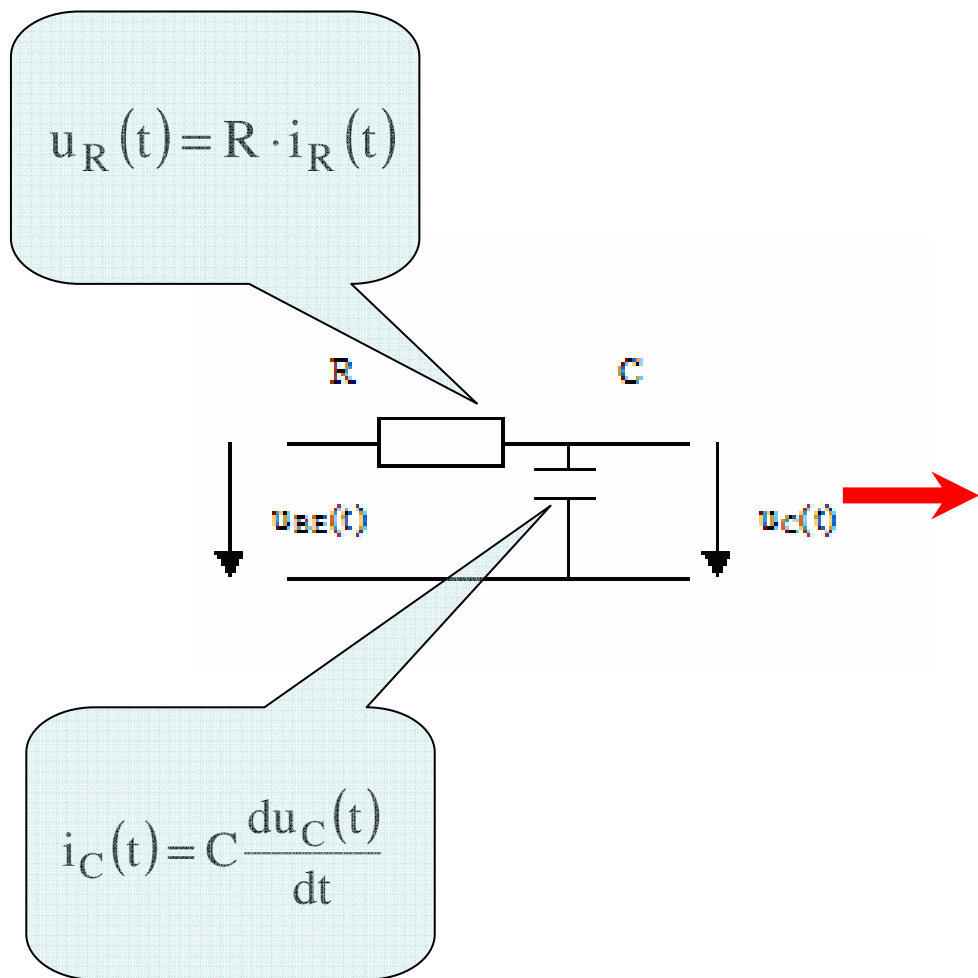


KF GAMFK AAI

#171

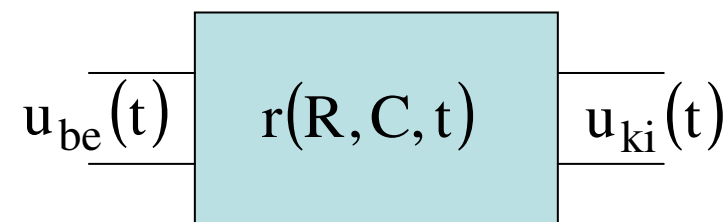
6

A rendszer leírása és a rendszerválasz meghatározása (cél és eredmény)



Cél (új rendszer alkotása összetevő rendszereiből):

$$u_{ki}(t) = f(u_{be}(t), r(R, C, t))$$

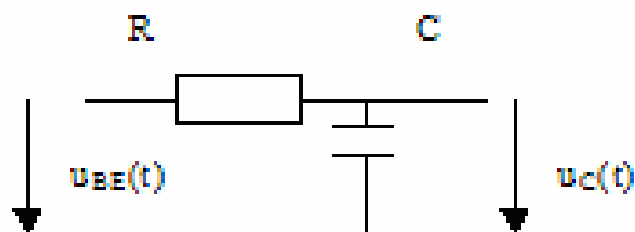


Eredmény:

$$r(R, C, t) = h(t) = \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$u_{ki}(t) = u_{be}(t) * h(t)$$

A rendszer leírása és a rendszerválasz meghatározása (az eredményhez vezető út)



A kimenőjel meghatározása
differenciál-egyenlet megoldásával

$$u_{BE}(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

A differenciál-egyenlet a konkrét bemenőjel és a kezdeti feltételek ismeretében oldható meg:

$$u_{BE}(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

$$i_C(t) = i_R(t)$$

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

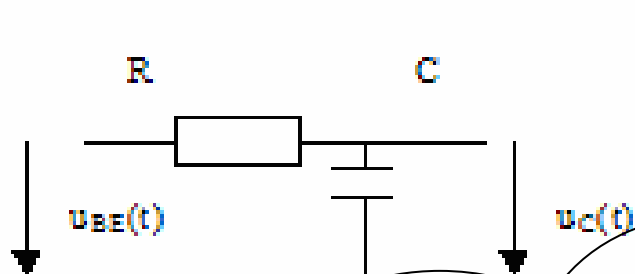


$$u_{BE}(t) = U \cdot e^{-\frac{1}{T} \cdot t} \quad t \geq 0$$

$$u_C(t) = U \cdot \frac{T}{T - RC} \left(e^{-\frac{1}{T}t} - e^{-\frac{1}{RC}t} \right) \quad t \geq 0$$

A rendszer leírása és a rendszerválasz meghatározása (az eredményhez vezető út)

A kimenőjel meghatározása fizikai megfontolásokkal

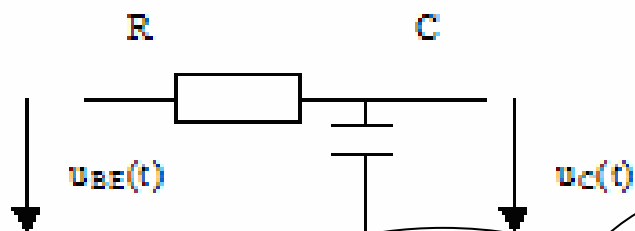


...ha az R ellenálláson át C-t igen rövid Δt idő alatt hirtelen U feszültségre töltjük, majd R-t párhuzamosan kapcsoljuk a C kapacitással, és ezután a rendszert magára hagyjuk ...

... akkor az ellenálláson U/R áram indul, a kondenzátoron a Δt idő alatt $U\Delta t/R$ töltés halmozódik fel, ami kapcsain $U\Delta t/RC$ feszültséget jelent...

A rendszer leírása és a rendszerválasz meghatározása (az eredményhez vezető út)

A kimenőjel meghatározása fizikai megfontolásokkal



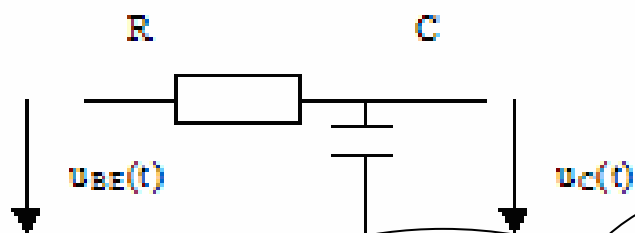
... a kondenzátor feszültsége az $U\Delta t/RC$ értékről csökken exponenciálisan (kisül):

$$u_C(t) = \frac{U\Delta t}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

... továbbá, igaz, hogy ha $U\Delta t=1$ miközben $\Delta t \rightarrow 0$, a fenti képletben szereplő adatok csak az R és a C értékeiből, vagyis az összetevő rendszerek adataiból számíthatók, így érdemes bevezetni ...

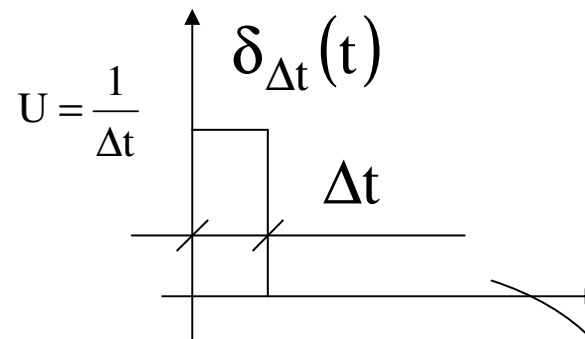
A rendszer leírása és a rendszerválasz meghatározása (az eredményhez vezető út)

A kimenőjel meghatározása fizikai megfontolásokkal



... a következő függvényt:

$$\delta_{\Delta t}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} & 0 \leq t < \Delta t \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

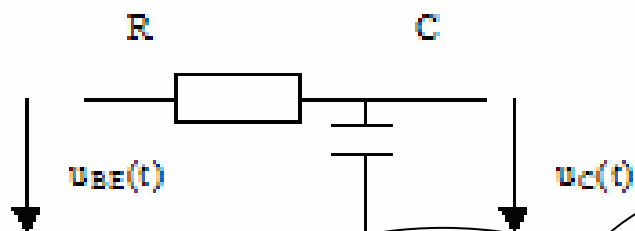


$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \delta_{\Delta t}(t) = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (\text{Dirac-delta})$$

A rendszer leírása és a rendszerválasz meghatározása (az eredményhez vezető út)

A kimenőjel meghatározása fizikai megfontolásokkal



... a rendszerre jellemző függvény legyen a Dirac-deltára adott válasz (szokásos neve: súlyfüggvény)

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

A fenti RC-tag esetében tehát a súlyfüggvény:

$$\delta(t) \rightarrow h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \rightarrow x(t) = K \cdot \delta(t) \rightarrow y(t) = K \cdot h(t)$$

Vajon tetszőleges bemenőjel esetén is alkalmazható-e a fenti gondolatmenet?

A rendszer leírása és a rendszerválasz meghatározása (az eredményhez vezető út)

Lineáris, időinvariáns rendszer

A bemenőjel közelíthető pillanatértékek összegeként: $\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \cdot \delta_{\Delta t}(t - n \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$

Ha a válasz a $\delta_{\Delta t}(t - n \cdot \Delta t)$ bemenetre $h_{\delta_{\Delta t}}(t - n \cdot \Delta t)$

és a kimenet közelíthető az alábbi összeggel: $\tilde{y}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \cdot h_{\delta_{\Delta t}}(t - n \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$

akkor a határátmenetek után adódik:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$$

KF GAMFK AAI

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$



#171

Konvolúciós integrál

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

13

Megjegyzés: A Dirac-féle delta „függvény” néhány tulajdonsága

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

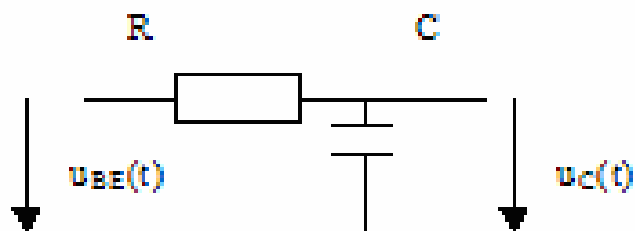
$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t)$$

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$$

A rendszer leírása és a rendszerválasz meghatározása

A kimenőjel meghatározása a konvolúciós integrállal



$$u_{KI}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{BE}(\tau) \cdot \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} d\tau$$

$$u_{BE}(t) = U \cdot e^{-\frac{1}{T}t}$$

$$u_{KI}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U \cdot e^{-\frac{1}{T}\tau} \cdot \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} d\tau$$

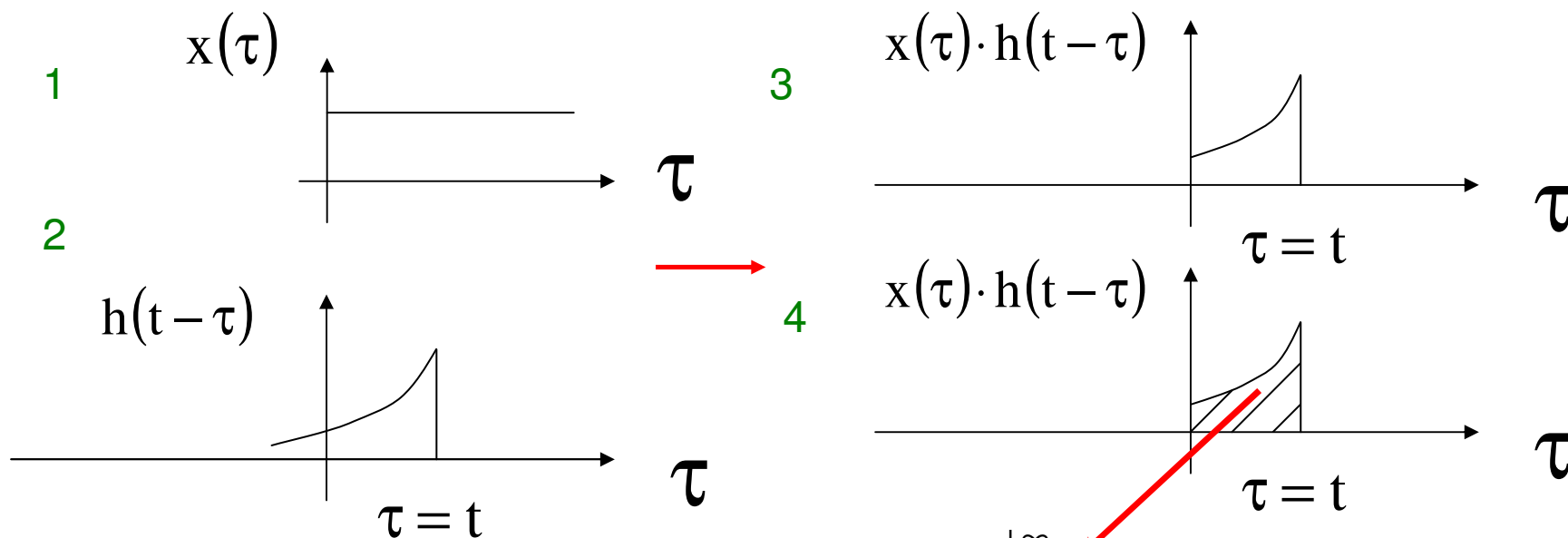
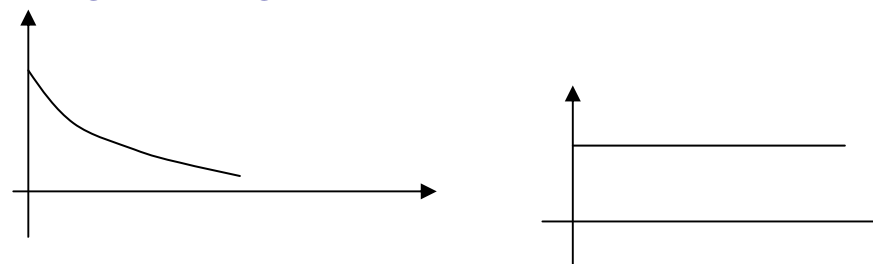
$$u_{KI}(t) = U \cdot \frac{T}{T-RC} \left(e^{-\frac{1}{T}t} - e^{-\frac{1}{RC}t} \right)$$

A rendszer leírása és a rendszerválasz meghatározása

A kimenőjel meghatározása a konvolúciós integrállal - grafikusan

$$h(t) = e^{-a \cdot t} \cdot u(t) \quad a > 0$$

$$x(t) = u(t)$$



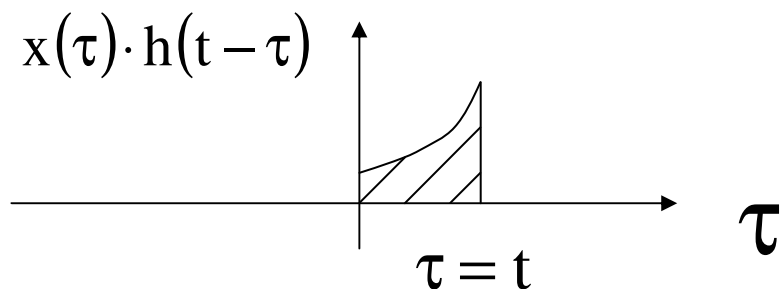
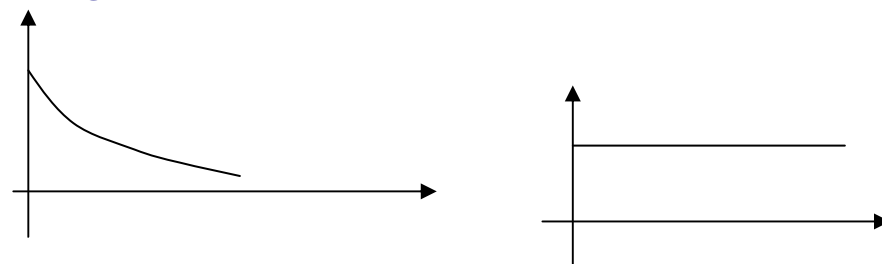
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

A rendszer leírása és a rendszerválasz meghatározása

A kimenőjel meghatározása a konvolúciós integrállal - számítással

$$h(t) = e^{-a \cdot t} \cdot u(t) \quad a > 0$$

$$x(t) = u(t)$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_0^t e^{-a \cdot (t - \tau)} d\tau$$

$$\int_0^t e^{-a \cdot (t - \tau)} d\tau = e^{-a \cdot t} \int_0^t e^{a \cdot \tau} d\tau = e^{-a \cdot t} \cdot \frac{1}{a} \cdot \left[e^{a \cdot \tau} \right]_0^t = \frac{1}{a} (1 - e^{-a \cdot t})$$

A periodikus jelek Fourier-sora

$$x(t) = x(t + T) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = A_0 + A_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + A_2 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T}t\right) + \dots + B_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + B_2 \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T}t\right) + \dots$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + \sum_{l=1}^{\infty} B_l \cdot \sin\left(l \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) dt \quad A_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt \quad B_l = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin\left(l \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt$$

$$f_0 = \frac{1}{T} \quad \text{Az alapharmonikus frekvenciája} \rightarrow \text{felharmonikusok} \quad k \cdot f_0 = k \cdot \frac{1}{T}$$

A periodikus jelek Fourier-sora

$$x(t) = x(t + T) \quad t \in \mathbb{R} \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

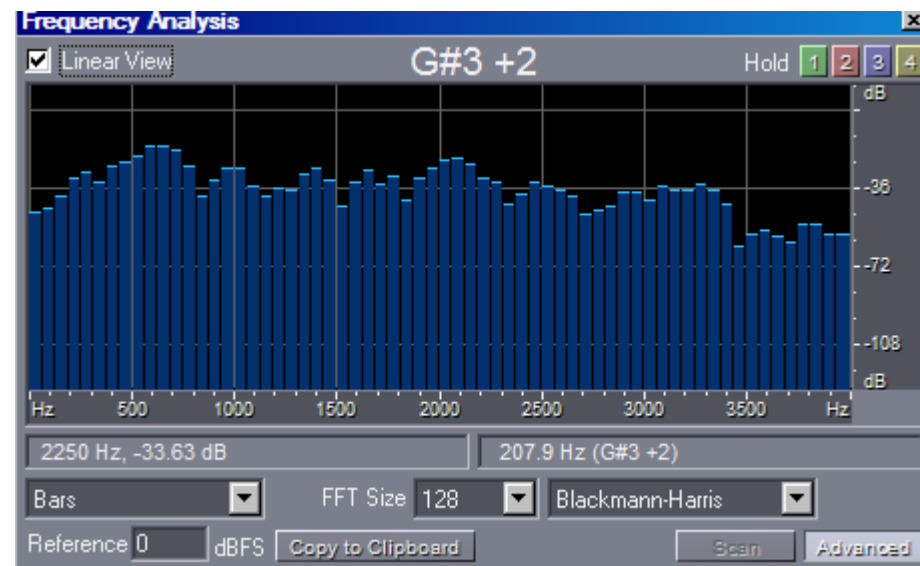
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} dt \quad A_0 = C_0 \quad C_k = \frac{A_k - j \cdot B_k}{2}$$

Alapharmonikus felharmonikusok

$$f = \frac{1}{T} \quad f_k = k \cdot \frac{1}{T}$$

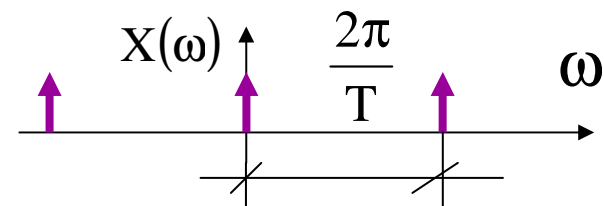
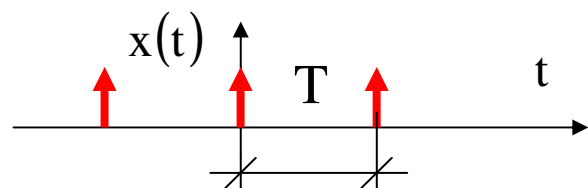
$|C_k|$ Amplitúdó-spektrum

$-\arcsin(C_k)$ Fázis-spektrum



Példa: különleges periodikus jel Fourier-sora

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot T) \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} dt$$



$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} dt = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t) dt = \frac{1}{T}$$

Az egyszeri lefutású jelek Fourier-integrálja ...

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

$$e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \longleftrightarrow 2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot T) \longleftrightarrow \frac{2\pi}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{T}\right)$$

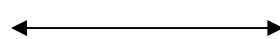
$$x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \cdot X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \longleftrightarrow X(\omega) \cdot H(\omega)$$

A lineáris, időinvariáns, folytonos idejű rendszer kimenőjelének számítása a Fourier-transzformáltakkal

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} d\omega \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

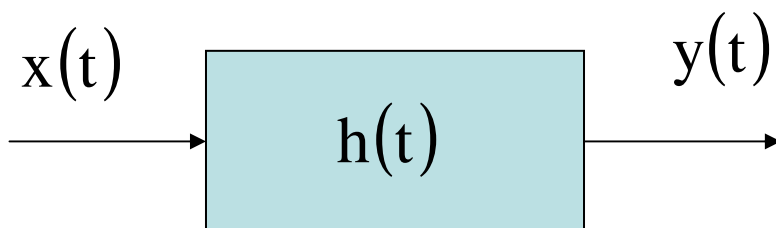
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$



$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$



$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} d\omega$$



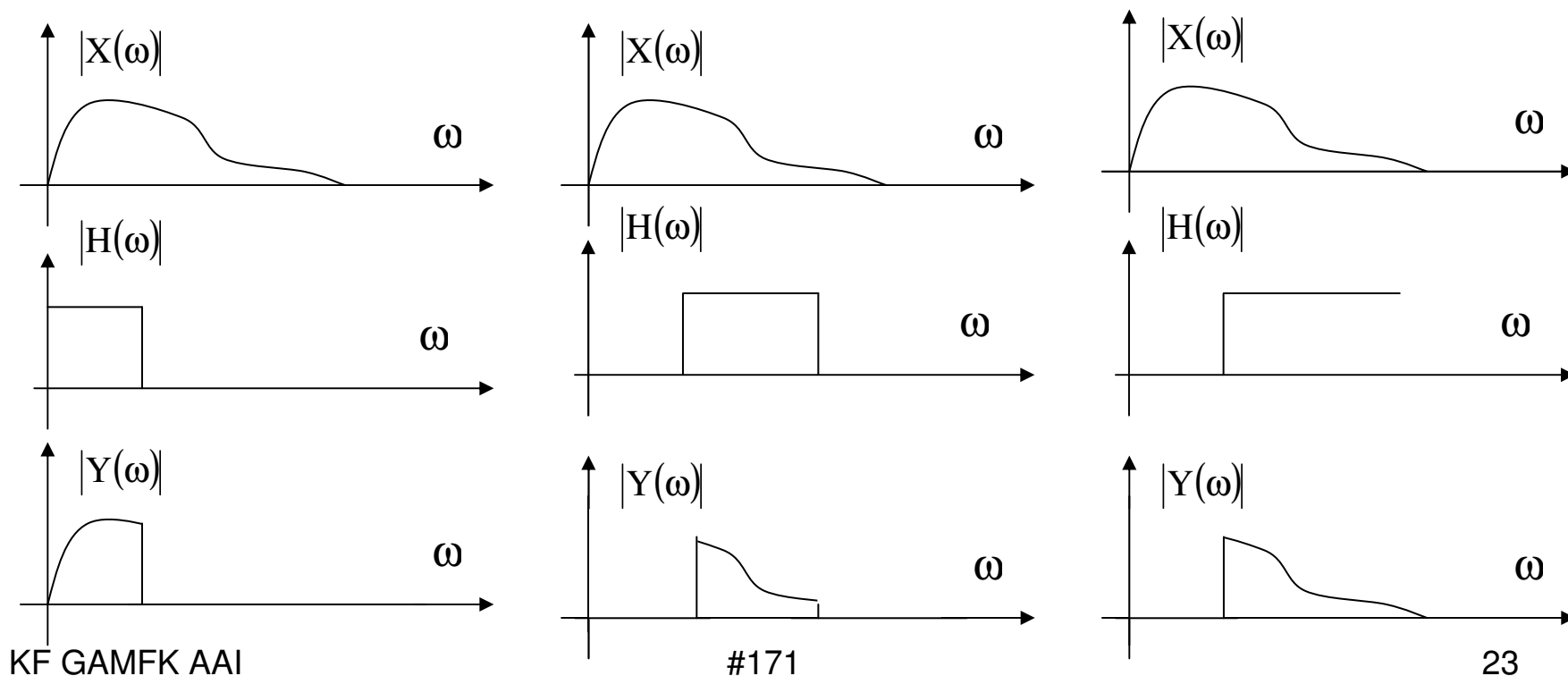
Az időtartományban konvolúció, a frekvenciatartományban szorzás ...

Analóg szűrők

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

... az analóg szűrő olyan folytonos idejű, lineáris, időinvariáns rendszer, amely a bemenő jel Fourier-transzformáltját a szorzás műveletével módosítja a súlyfüggvény Fourier-transzformáltja szerint ...

Főbb típusai: aluláteresztő szűrő, sávszűrő, feluláteresztő szűrő ...



Analóg szűrők

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

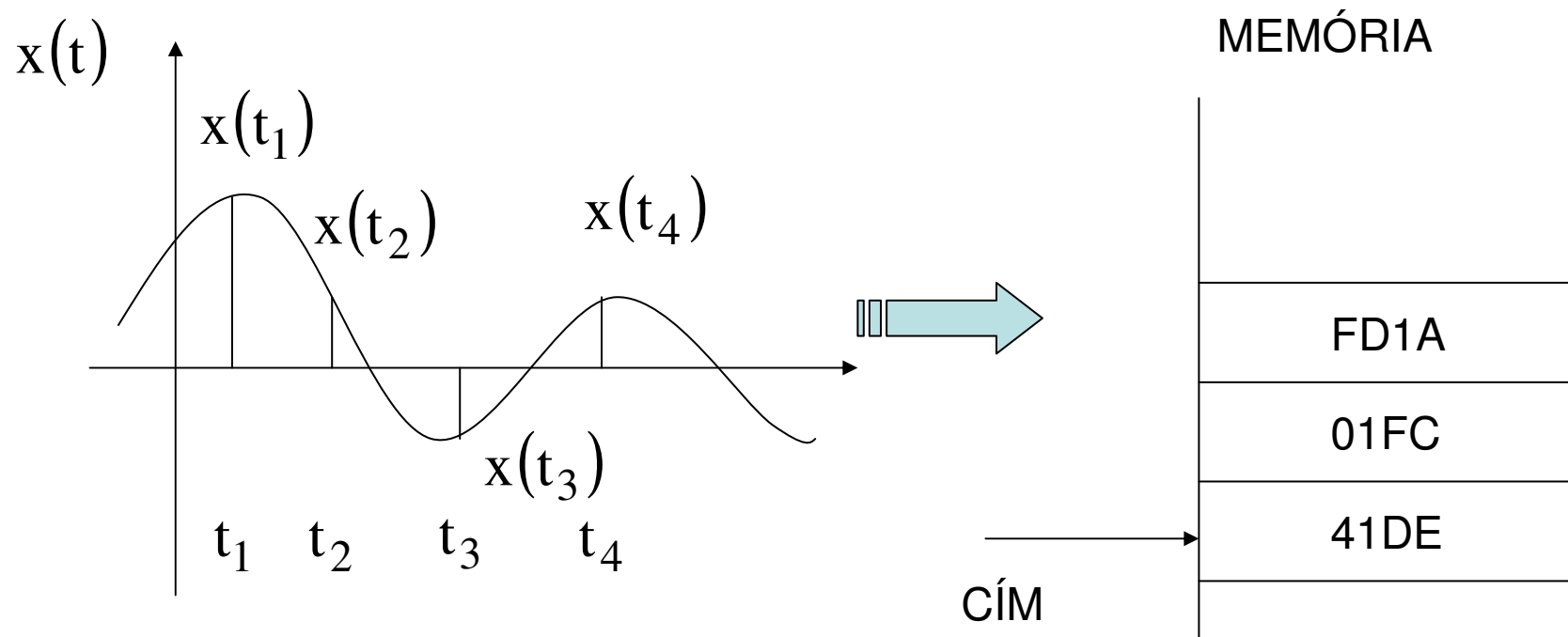
... az analóg szűrő olyan folytonos idejű, lineáris, időinvariáns rendszer, amely a bemenő jel Fourier-transzformáltját a szorzás műveletével módosítja a súlyfüggvény Fourier-transzformáltja szerint ...

Főbb típusai: aluláteresztő szűrő, sávszűrő, felüláteresztő szűrő ...

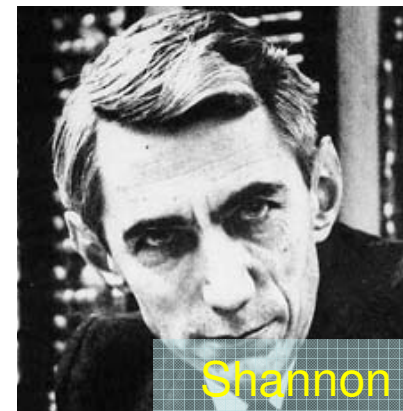
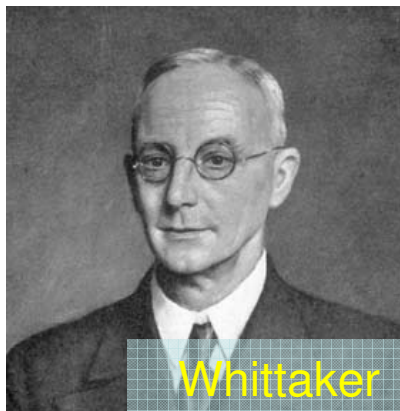
Digitális szűrők:

- szűkebb értelemben vett feladatuk az analóg szűrők spektrum-műveleteinek megfeleltethető spektrummodosítások elvégzése a folytonos idejű jelből előállított számokkal és megfelelő algoritmussal (esetleg ennek az előírt sebességű végrehajtására alkalmas architektúrával)
- tágabb értelemben véve minden olyan művelet, ami a bemenő számsorozatból algoritmussal kimenő számsorozatot állít elő, digitális szűrés

A folytonos idejű (analóg) jelből tehát számokat kell előállítanunk az algoritmussal való (számítógépi) feldolgozáshoz



2. Mintavételezés, kvantálás, kódolás

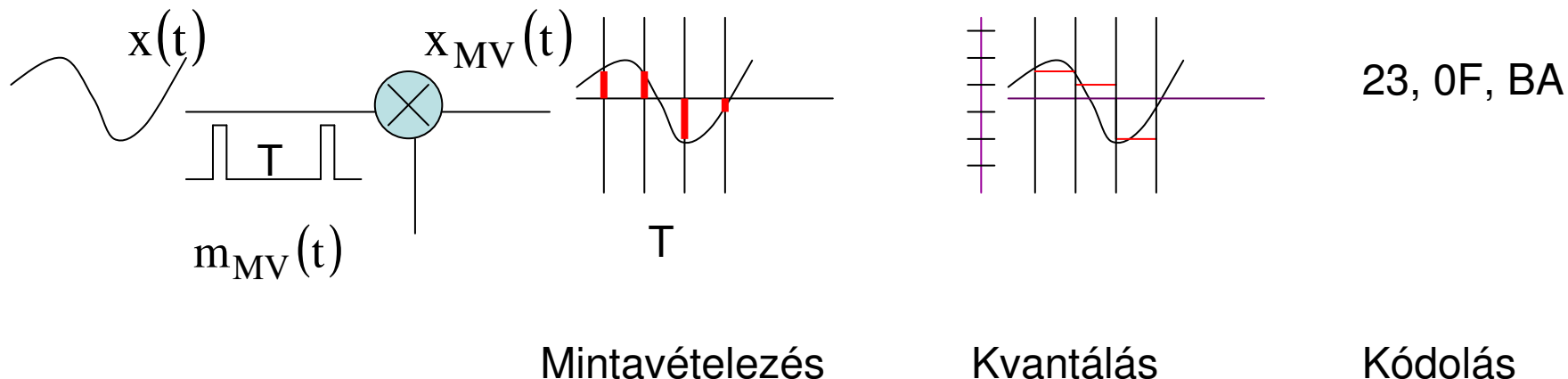


E. T. Whittaker, On the functions which are represented by the expansion of the interpolation theory, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, sec. A, 35 (1915), 181-194.

H. Nyquist: Certain topics in telegraph transmission theory. Trans. AIEE, vol. 47. pp. 617-644. (Apr. 1928)

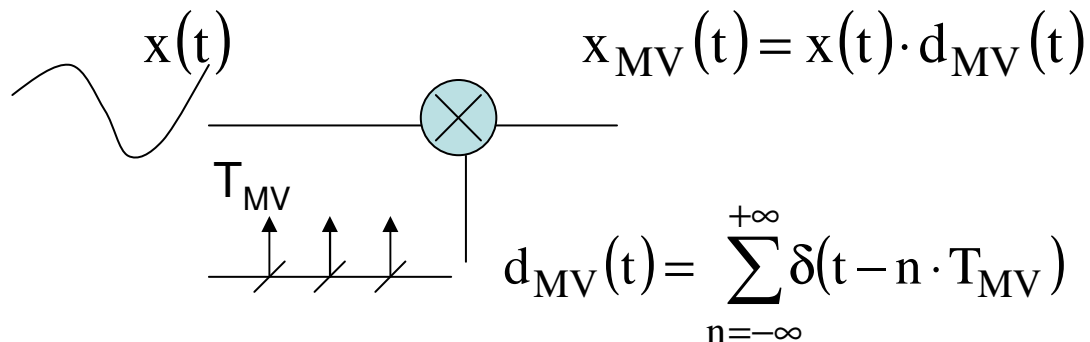
V. Kotel'nikov, On the carrying capacity of the "ether" and wire in telecommunications, material for the first All-Union Conference on Questions of Communications, Izd. Red. Upr. Svyazi RKKA, Moscow, Russian (1933).

C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, Bell System Tech. J. 27 (1948), 379-423.



Cél: a mintavett jel spektrumának meghatározása

1. lépés: matematikai mintavételezés (a spektrális viszonyok számítása idealizált esetben, amikor a valóságos mintavevő impulzussorozatot periodikus Dirac-delta-sorozattal modellezzük),
2. lépés: valóságos mintavételezés (amikor a periodikus négyszögjel Fourier-transzformáltját vesszük figyelembe)
- [3. lépés: megvalósítási kérdések (S/H, A/D és D/A eszközök, működésük, az átalakítás hibái és kiküszöbölésük) – más tantárgy]



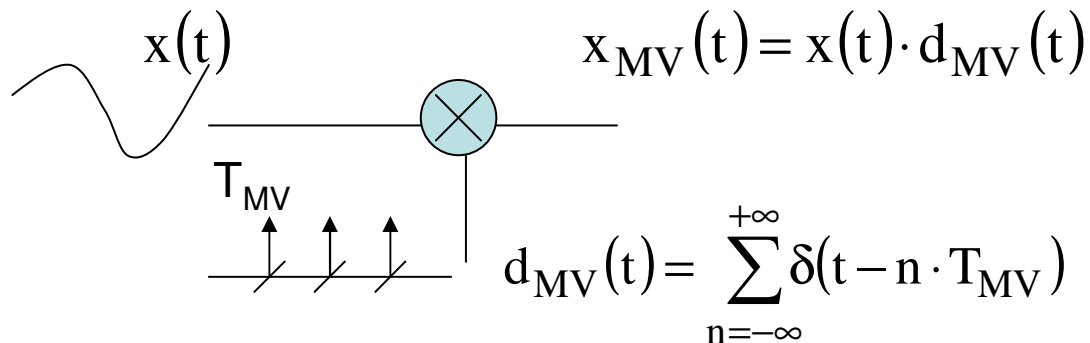
matematikai mintavételezés

$$x_{MV}(t) = x(t) \cdot d_{MV}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot T_{MV}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot T_{MV}) \cdot \delta(t - n \cdot T_{MV})$$

... az időtartományban szorzás, a frekvenciatartományban konvolúció ...

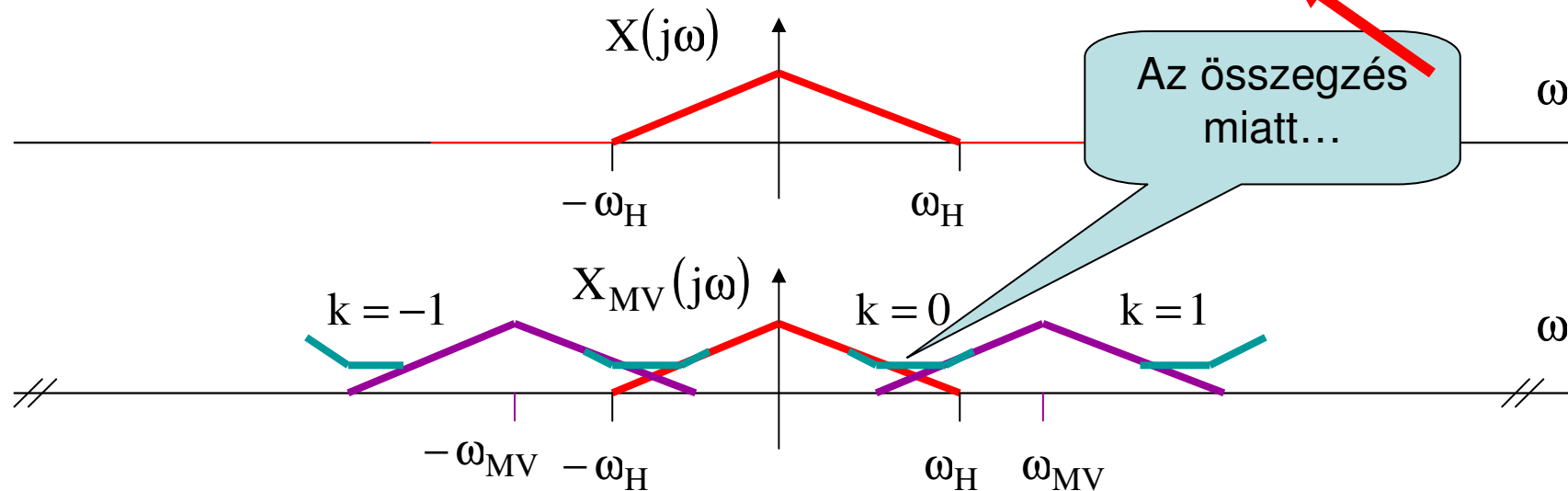
$$D_{MV}(j\omega) = \frac{2\pi}{T_{MV}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{T_{MV}}\right)$$

$$X_{MV}(j\omega) = X(j\omega) * D_{MV}(j\omega) = X(j\omega) * \left(\frac{2\pi}{T_{MV}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k \cdot \omega_{MV}) \right) = \frac{2\pi}{T_{MV}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k \cdot \omega_{MV}))$$



matematikai mintavételezés
szemléltetés

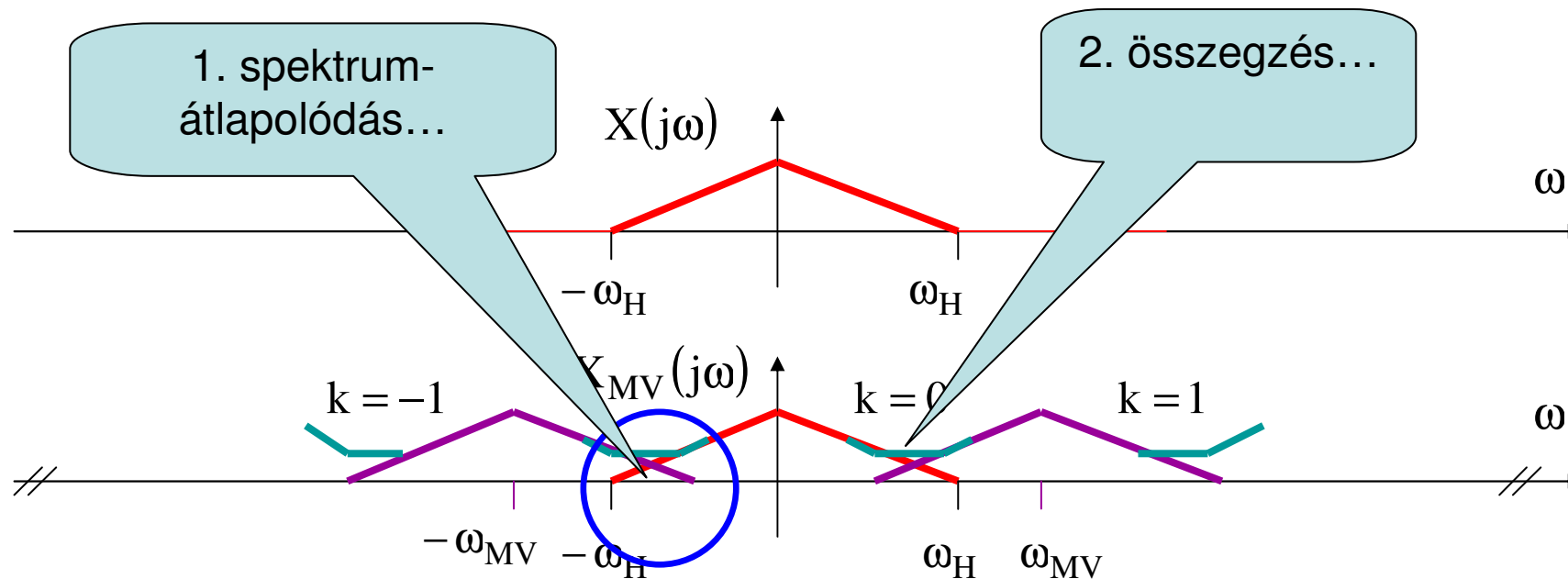
$$X_{MV}(j\omega) = X(j\omega) * D_{MV}(j\omega) = X(j\omega) * \left(\frac{2\pi}{T_{MV}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k \cdot \omega_{MV}) \right) = \frac{2\pi}{T_{MV}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k \cdot \omega_{MV}))$$



$$X_{MV}(j\omega) = \frac{2\pi}{T_{MV}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k \cdot \omega_{MV}))$$

matematikai mintavételezés
szemléltetés

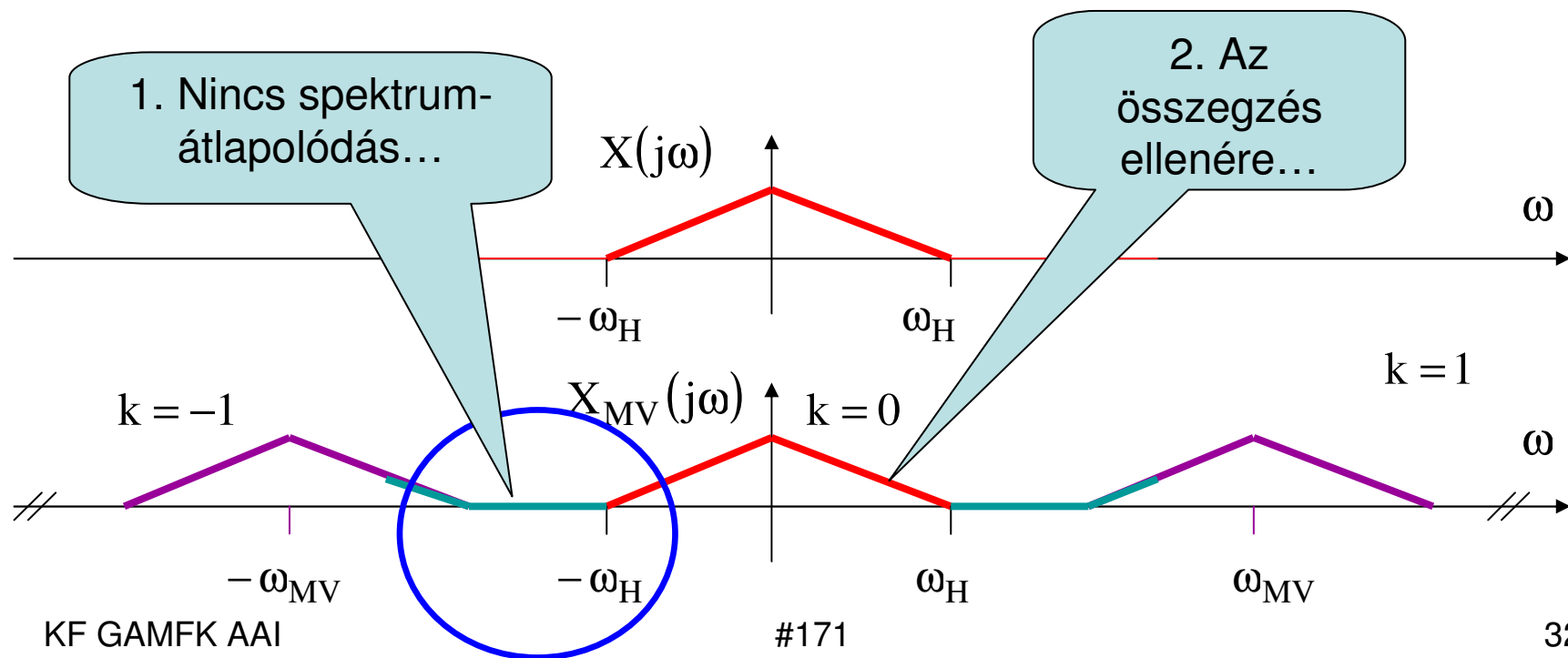
Ha ω_H kicsi, spektrum-átlapolódás lesz, és az összegzés miatt az eredeti spektrum sehol sem marad meg pontosan a mintavett jel spektrumában



$$X_{MV}(j\omega) = \frac{2\pi}{T_{MV}} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k \cdot \omega_{MV}))$$

matematikai mintavételezés
szemléltetés

Ha ω_H elég nagy, spektrum-átlapolódás nem lesz, és az összegzés ellenére az eredeti spektrum pontosan megmarad a mintavett jel spektrumában



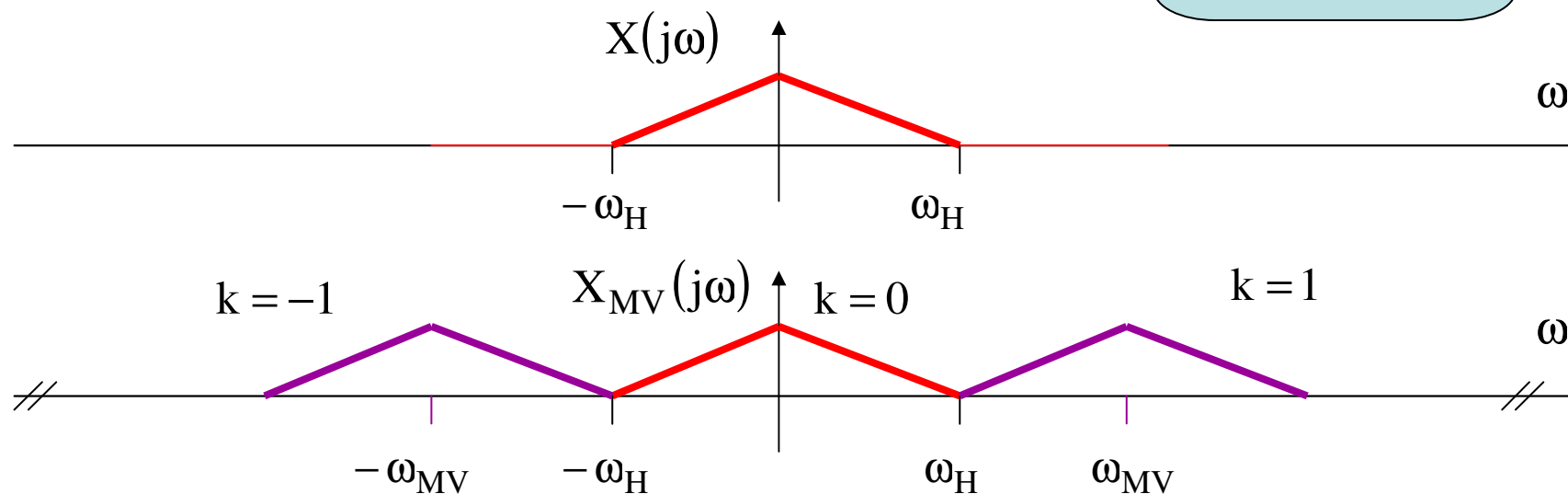
$$X_{MV}(j\omega) = \frac{2\pi}{T_{MV}} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k \cdot \omega_{MV}))$$

matematikai mintavételezés
szemléltetés

ω_H határsetben:

$$2 \cdot \omega_H < \omega_{MV}$$

Mintavételi szabály



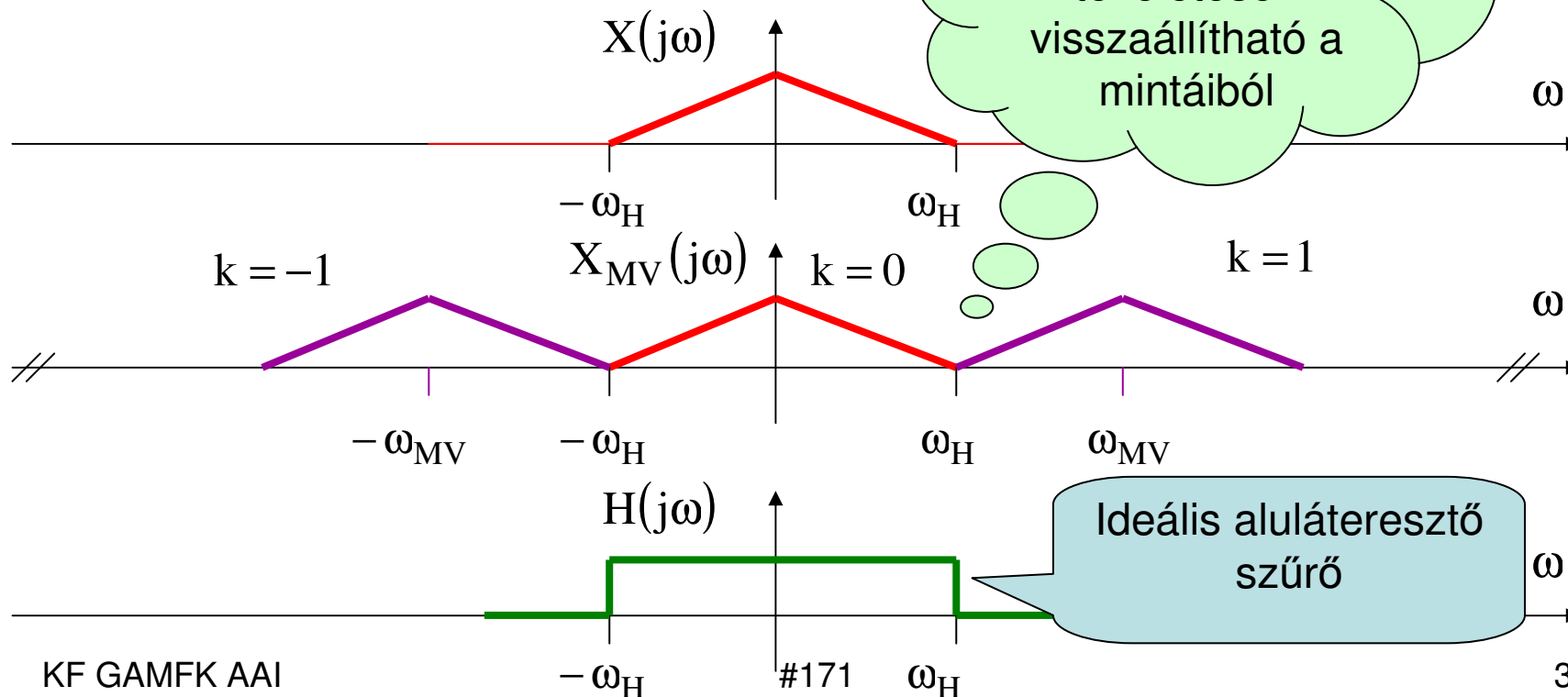
$$X_{MV}(j\omega) = \frac{2\pi}{T_{MV}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k \cdot \omega_{MV}))$$

matematikai mintavételezés
szemléltetés

ω_H határsetben:

$$2 \cdot \omega_H < \omega_{MV}$$

Az eredeti jel (spektruma) tökéletesen visszaállítható a mintáiból



$$X_{MV}(j\omega) = \frac{2\pi}{T_{MV}} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k \cdot \omega_{MV}))$$

matematikai mintavételezés

A visszaállítás a frekvencia-tartományban

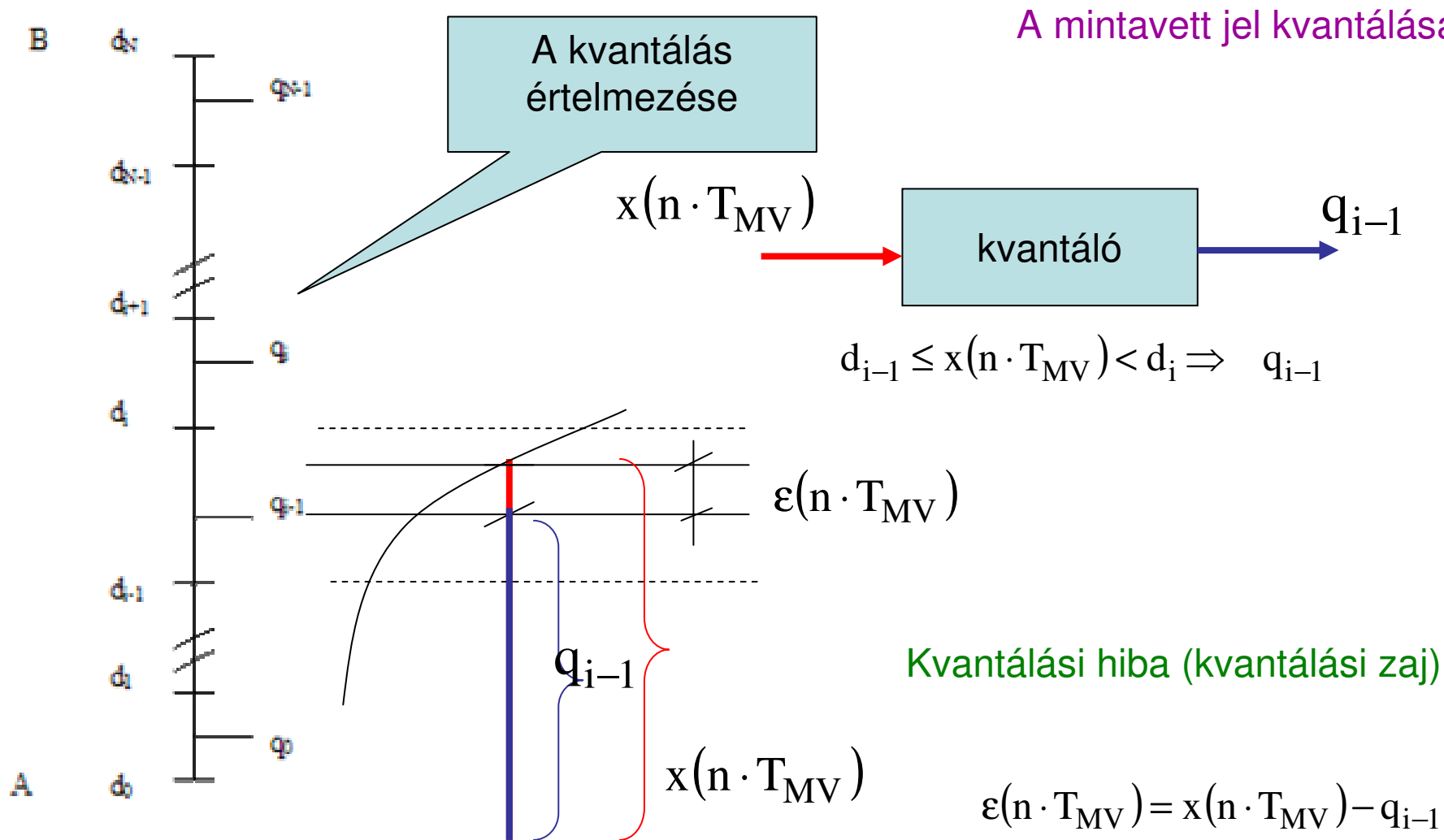
$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_H \\ 0 & |\omega| > \omega_H \end{cases} \quad X_{MV}(j\omega) \cdot H(j\omega) = X(j\omega)$$

A visszaállítás az időtartományban

$$h(t) = \frac{1}{T_{MV}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T_{MV}} t\right)}{\frac{\pi}{T_{MV}} t}$$

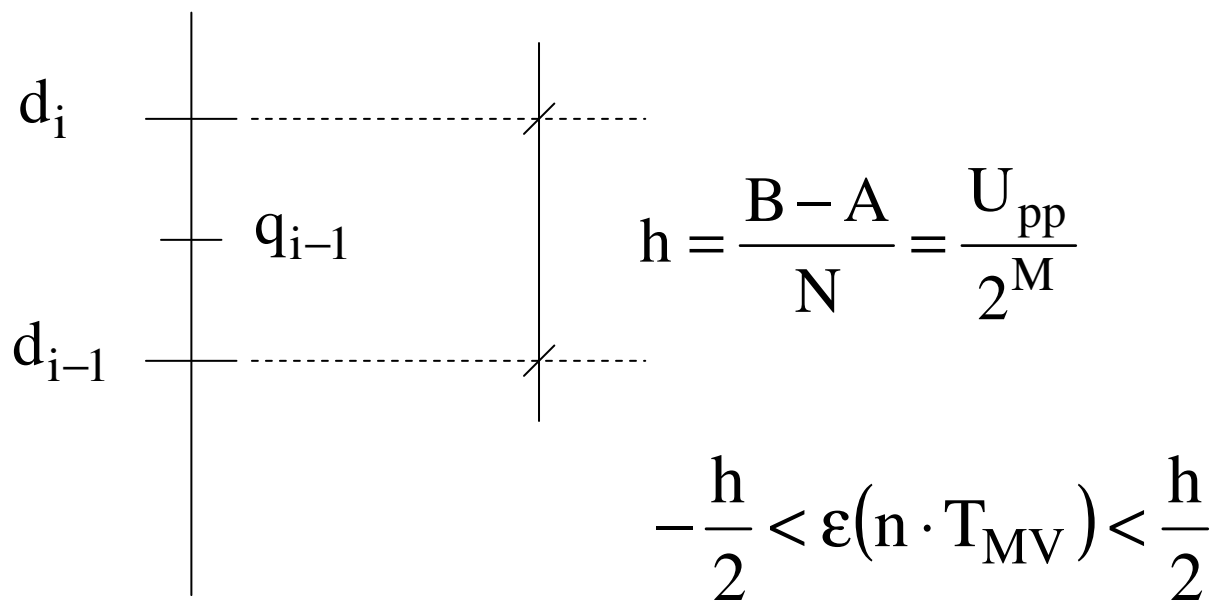
$$x(t) = x_{MV}(t) * h(t) = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n \cdot T_{MV}) \cdot \delta(t - n \cdot T_{MV}) \right) * \left(\frac{1}{T_0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T_{MV}} t\right)}{\frac{\pi}{T_{MV}} t} \right) =$$

$$= \frac{1}{T_{MV}} \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n \cdot T_{MV}) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T_{MV}} (t - n \cdot T_{MV})\right)}{\frac{\pi}{T_{MV}} (t - n \cdot T_{MV})}$$



A mintavett jel kvantálása

Példa. A kvantálási hiba egyenletes kvantáláskor, ha a kvantálási szintek száma 2-hatvány: $N = 2^M$



A mintavett jel kvantálása

Az optimális kvantálás elve: alkalmas kritérium-függvény szélsőértékének meghatározása (gyakran a négyzetes hiba minimalizálása)

$$E = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{d_i}^{d_{i+1}} (x - q_i)^2 \cdot f(x) dx \right) \Rightarrow \min$$

Megjegyzés: az optimális kvantáló esetén mind a kvantálási intervallum, mind a kvantálási szint a jelamplitúdók valószínűségi sűrűségfüggvényétől függ, vagyis jelfüggő.

Beszédjelek átvitele esetén használt megoldások:

A-karakterisztika, vagy μ -karakterisztika szerinti kvantálás

A kvantált érték kódolása

A gyakorlatban a kvantálási szintek száma 2-hatvány, így az adott kvantálási szint sorszáma hatékonyan kódolható binárisan. A szokásos esetek: tiszta bináris kód, ofszet bináris kód, kettes komplement kód, előjel és abszolút-értékes kód.

A digitális frekvencia és a digitális körfrekvencia

$$\omega_D = \omega \cdot T_{MV} = 2\pi \cdot \frac{\omega}{\omega_{MV}} \qquad f_D = \frac{f}{f_{MV}} = \frac{\omega_D}{2\pi}$$

$$\omega = \frac{\omega_{MV}}{2} \quad \rightarrow \quad \omega_D^F = 2\pi \cdot \frac{\omega_{MV}}{\omega_{MV}} = \pi \quad \rightarrow \quad |\omega_D| \in (-\pi; \pi)$$

A számsorozathoz rendelt spektrum esetén hasznos jellemzők

$$|f_D| \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

3. Diszkrét idejű, lineáris időinvariáns rendszerek, főbb tulajdonságaik. Leírás a z -tartományban. Differencia-egyenlet és megoldása. A lineáris és a cirkuláris konvolúció.

4. Számsorozatok Fourier-transzformáltja. A diszkrét rendszer frekvencia-karakterisztikája.

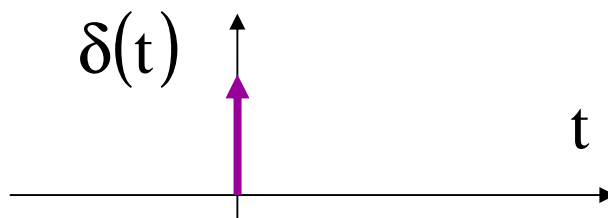
5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

6. Diszkrét ortogonális transzformációk.

3. Diszkrét idejű, lineáris időinvariáns rendszerek, főbb tulajdonságaik. Leírás a z-tartományban. Differencia-egyenlet és megoldása. A lineáris és a cirkuláris konvolúció.

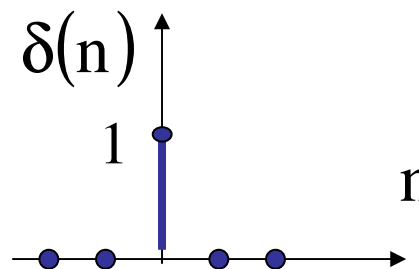
A főbb jeltípusok és az alpműveletek diszkrét idejű jeleknél

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \delta_{\Delta t}(t)$$

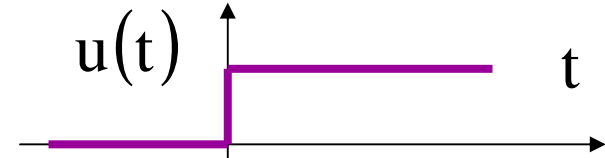
 $\delta(t)$


$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

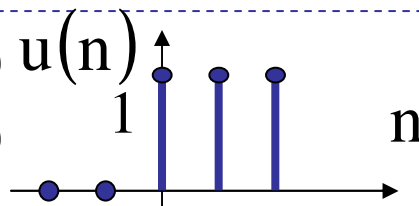
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



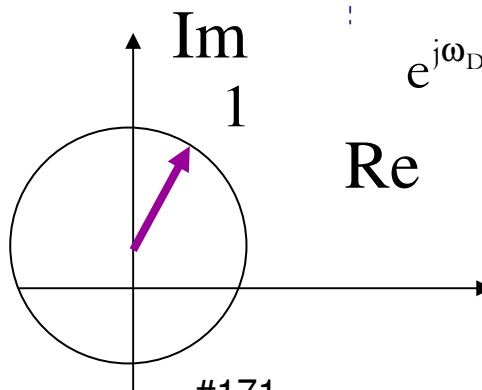
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

 $u(t)$


$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



$$e^{j\omega t} = \cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t)$$



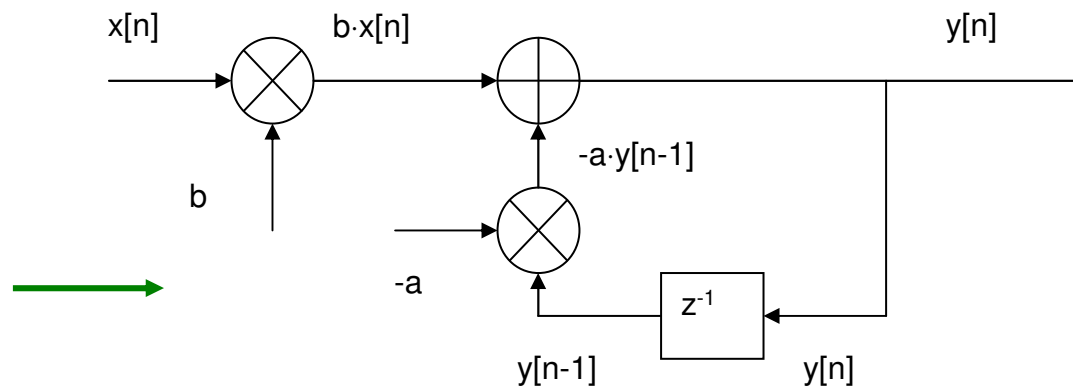
$$e^{j\omega_D n} = \cos(\omega_D \cdot n) + j \sin(\omega_D \cdot n)$$

3. Diszkrét idejű, lineáris időinvariáns rendszerek, főbb tulajdonságaik. Leírás a z-tartományban. Differencia-egyenlet és megoldása. A lineáris és a cirkuláris konvolúció.

$$a \cdot x(n) + b \cdot y(n) \quad x(n) \cdot y(n) \quad x(n-1) \quad x(n+1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau) d\tau \quad \longrightarrow \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot y(n-m)$$

$$y(n) + a \cdot y(n-1) = b \cdot x(n)$$



3. Diszkrét idejű, lineáris időinvariáns rendszerek, főbb tulajdonságaik. Leírás a z-tartományban. Differencia-egyenlet és megoldása. A lineáris és a cirkuláris konvolúció.

$$y(n) + a \cdot y(n-1) = b \cdot x(n)$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{\text{differencia-egyenlet megoldással}} y(n) = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1 - (-2a)^{n+1}}{1 + 2a}$$

lineáris konvolúcióval

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b \cdot (-a)^m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sum_{m=0}^n (-2a)^m =$$

$$= b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{(-2a)^{n+1} - 1}{-2a - 1} = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1 - (-2a)^{n+1}}{1 + 2a}$$

3. Diszkrét idejű, lineáris időinvariáns rendszerek, főbb tulajdonságaik. Leírás a z-tartományban. Differencia-egyenlet és megoldása. A lineáris és a cirkuláris konvolúció.

$$y(n) + a \cdot y(n-1) = b \cdot x(n)$$

Megoldása z-transzformációval

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

Példa: $x(n) = a^n \cdot u(n)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot u(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a \cdot z^{-1})^n$$

Példa:

$$x(n) = \begin{cases} a^n & 0 \leq n < N-1 \quad a \neq 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (a \cdot z^{-1})^n = 1 \cdot \frac{(a \cdot z^{-1})^N - 1}{a \cdot z^{-1} - 1} = \frac{1}{z^{N-1}} \cdot \frac{z^N - a^N}{z - a}$$

3. Diszkrét idejű, lineáris időinvariáns rendszerek, főbb tulajdonságaik. Leírás a z-tartományban. Differencia-egyenlet és megoldása. A lineáris és a cirkuláris konvolúció.

$$y(n) + a \cdot y(n-1) = b \cdot x(n)$$

Megoldása z-transzformációval

A z-transzformáció néhány tulajdonsága

$$a_1 \cdot x_1(n) + a_2 \cdot x_2(n) \quad \longleftrightarrow \quad a_1 \cdot X_1(z) + a_2 \cdot X_2(z)$$

$$x(n - M) \quad \longleftrightarrow \quad z^{-M} \cdot X(z)$$

$$x(-n) \quad \longleftrightarrow \quad X\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$x_1(n) * x_2(n) \quad \longleftrightarrow \quad X_1(z) \cdot X_2(z)$$

3. Diszkrét idejű, lineáris időinvariáns rendszerek, főbb tulajdonságaik. Leírás a z-tartományban. Differencia-egyenlet és megoldása. A lineáris és a cirkuláris konvolúció.

$$y(n) + a \cdot y(n-1) = b \cdot x(n)$$

Megoldása z-transzformációval

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad y(n) + a \cdot y(n-1) = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$Y(z) + a \cdot z^{-1} \cdot Y(z) = b \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{b}{(1 + a \cdot z^{-1}) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{2ab}{1 + 2a} \cdot \frac{1}{1 + a \cdot z^{-1}} + \frac{b}{1 + 2a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

a 3.1. példa
eredményét is
felhasználva

$$y(n) = \frac{2ab}{1 + 2a} \cdot (-a)^n \cdot u(n) + \frac{b}{1 + 2a} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1 - (-2a)^{n+1}}{1 + 2a}$$

3. Diszkrét idejű, lineáris időinvariáns rendszerek, főbb tulajdonságaik. Leírás a z-tartományban. Differencia-egyenlet és megoldása. A lineáris és a cirkuláris konvolúció.

$$\sum_{j=0}^N a(j) \cdot y(n-j) = \sum_{k=0}^M b(k) \cdot x(n-k)$$

3.5. A differenciaegyenlet általános alakja

$$1. \quad y(n) = -\sum_{j=1}^N \frac{a(j)}{a(0)} y(n-j) + \sum_{k=0}^M \frac{b(k)}{a(0)} x(n-k)$$

$$2. \quad a(0) \cdot Y(z) + a(1) \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + \dots + a(j) \cdot z^{-j} \cdot Y(z) + \dots + a(N) \cdot z^{-N} \cdot Y(z) = \\ = b(0) \cdot X(z) + b(1) \cdot z^{-1} \cdot X(z) + \dots + b(k) \cdot z^{-k} \cdot X(z) + \dots + b(M) \cdot z^{-M} \cdot X(z)$$

Az impulzusválasz-
függvény z-
transzformáltja

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b(k) \cdot z^{-k}}{\sum_{j=0}^N a(j) \cdot z^{-j}}$$

3. Diszkrét idejű, lineáris időinvariáns rendszerek, főbb tulajdonságaik. Leírás a z-tartományban. Differencia-egyenlet és megoldása. A lineáris és a cirkuláris konvolúció.

$$\sum_{j=0}^N a(j) \cdot y(n-j) = \sum_{k=0}^M b(k) \cdot x(n-k)$$

3.5. A differenciaegyenlet általános alakja

FIR szűrő

$$a(0)=1 \quad a(j)=0 \quad j=1\dots N$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^M b(k) \cdot z^{-k}$$

$$h(n) = b(n) \quad n = 0..M \quad y(n) = \sum_{k=0}^M h(k) \cdot x(n-k) \quad n = 0,1,2,\dots$$

FIR-szűrés: lineáris
konvolúció

3. Diszkrét idejű, lineáris időinvariáns rendszerek, főbb tulajdonságaik. Leírás a z-tartományban. Differencia-egyenlet és megoldása. A lineáris és a cirkuláris konvolúció.

$$y(n) = \sum_{k=0}^M h(k) \cdot x(n-k) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Példa: a lineáris konvolúció számítása

Legyen $x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1)$, $x_2(n) = 3\delta(n) + \delta(n-1) + 4\delta(n-2)$, számítsuk ki az $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$ sorozat mintáit

0	0	0	1	2	0	0	0	
0	4	1	3	0	0	0	0	3
0	0	4	1	3	0	0	0	7
0	0	0	4	1	3	0	0	6
0	0	0	0	4	1	3	0	8
0	0	0	0	0	4	1	3	0

#171

3. Diszkrét idejű, lineáris időinvariáns rendszerek, főbb tulajdonságaik. Leírás a z-tartományban. Differencia-egyenlet és megoldása. A lineáris és a cirkuláris konvolúció.

$$y(n) = \sum_{k=0}^M h(k) \cdot x(n-k) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Példa: a lineáris konvolúció számítása

Legyen $x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1)$, $x_2(n) = 3\delta(n) + \delta(n-1) + 4\delta(n-2)$, számítsuk ki az $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$ sorozat mintáit

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

0	0	0	1	2	0	0	0	
0	4	1	3	0	0	0	0	3
0	0	4	1	3	0	0	0	7
0	0	0	4	1	3	0	0	6
0	0	0	0	4	1	3	0	8
0	0	0	0	0	4	1	3	0

3. Diszkrét idejű, lineáris időinvariáns rendszerek, főbb tulajdonságaik. Leírás a z-tartományban. Differencia-egyenlet és megoldása. A lineáris és a cirkuláris konvolúció.

Példa: a cirkuláris konvolúció számítása

1	3	2	<i>1</i>	<i>3</i>	<i>2</i>	1	3	2	
5	4	1	5	4	1	5	4	1	19
1	5	4	1	5	4	1	5	4	24
4	1	5	4	1	5	4	1	5	17
5	4	1	5	4	1	5	4	1	19

4. Számsorozatok Fourier-transzformáltja. A diszkrét rendszer frekvencia-karakterisztikája.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega \quad X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Példa:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{\alpha} \leq \omega \leq \frac{\pi}{\alpha} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\frac{\pi}{\alpha}}^{+\frac{\pi}{\alpha}} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2 \cdot \pi} \left[\frac{1}{j \cdot n} e^{j\omega n} \right]_{-\frac{\pi}{\alpha}}^{+\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \left[\frac{1}{j \cdot n} e^{j\frac{\pi}{\alpha} n} - \frac{1}{j \cdot n} e^{j\left(-\frac{\pi}{\alpha}\right) n} \right] = \\ &= \frac{2}{2\alpha} \frac{e^{j\frac{\pi}{\alpha} n} - e^{-j\frac{\pi}{\alpha} n}}{2 \cdot j \cdot n \cdot \frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha} n\right)}{\frac{\pi}{\alpha} n} \end{aligned}$$

4. Számsorozatok Fourier-transzformáltja. A diszkrét rendszer frekvencia-karakterisztikája.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

$$a_1 \cdot x_1(n) + a_2 \cdot x_2(n) \quad \longleftrightarrow \quad a_1 \cdot X_1(e^{j\omega}) + a_2 \cdot X_2(e^{j\omega})$$

$$x(n-m) \quad \longleftrightarrow \quad e^{-j\omega \cdot m} \cdot X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_0 \cdot n} \cdot x(n) \quad \longleftrightarrow \quad X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

$$x(n) * y(n) \quad \longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$$

$$x(n) \cdot y(n) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\varphi}) \cdot Y(e^{j(\omega-\varphi)}) d\varphi$$

4. Számsorozatok Fourier-transzformáltja. A diszkrét rendszer frekvencia-karakterisztikája.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega \cdot n} d\omega$$

$$e^{j\omega_0 \cdot n} \cdot x(n) \quad \longleftrightarrow \quad X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

Példa:

Mi történik, ha az ideális aluláteresztő szűrőnél megismert $H_{LP}(e^{j\omega})$ transzformáltat π -vel eltoljuk?

$$H_{HP}(e^{j\omega}) = H_{LP}(e^{j(\omega - \pi)}) \quad \longrightarrow \quad h_{HP}(n) = e^{j\pi \cdot n} \cdot h_{LP}(n) = (-1)^n \cdot h_{LP}(n)$$

4. Számsorozatok Fourier-transzformáltja. A diszkrét rendszer frekvencia-karakterisztikája.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

Példa:

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\alpha \cdot \omega}{2}\right) & -\pi \leq \omega < \pi \quad \alpha > 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



$$\cos^2\left(\frac{\alpha \cdot \omega}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha \cdot \omega)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\alpha}}^{\frac{\pi}{\alpha}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\alpha \cdot \omega) \right) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

$$x(n) = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{\alpha}\right) \cdot \left(\frac{1}{2\pi \cdot n} + \frac{n}{2\pi \cdot (\alpha^2 - n^2)} \right) = \frac{\alpha^2}{2\pi \cdot n \cdot (\alpha^2 - n^2)} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{\alpha}\right)$$

4. Számsorozatok Fourier-transzformáltja. A diszkrét rendszer frekvencia-karakterisztikája.

$H(e^{j\omega})$ a diszkrét rendszer frekvenciakarakterisztikája

$|H(e^{j\omega})|$ amplitúdó-karakterisztika $-\arg(H(e^{j\omega}))$ fáziskarakterisztika

$$y(n) + a \cdot y(n-1) = b \cdot x(n)$$

$$Y(z) \cdot (1 + a \cdot z^{-1}) = b \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b}{1 + a \cdot z^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b}{1 + a \cdot e^{-j\omega}}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|b|}{|1 + a \cdot e^{-j\omega}|} = \frac{|b|}{\sqrt{1 + a^2 + 2a \cdot \cos \omega}}$$

$$-\arg H(e^{j\omega}) = -\arctan \frac{\operatorname{Im}\{H(e^{j\omega})\}}{\operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\}} = -\arctan \frac{a \cdot \sin \omega}{1 + a \cdot \cos \omega}$$

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

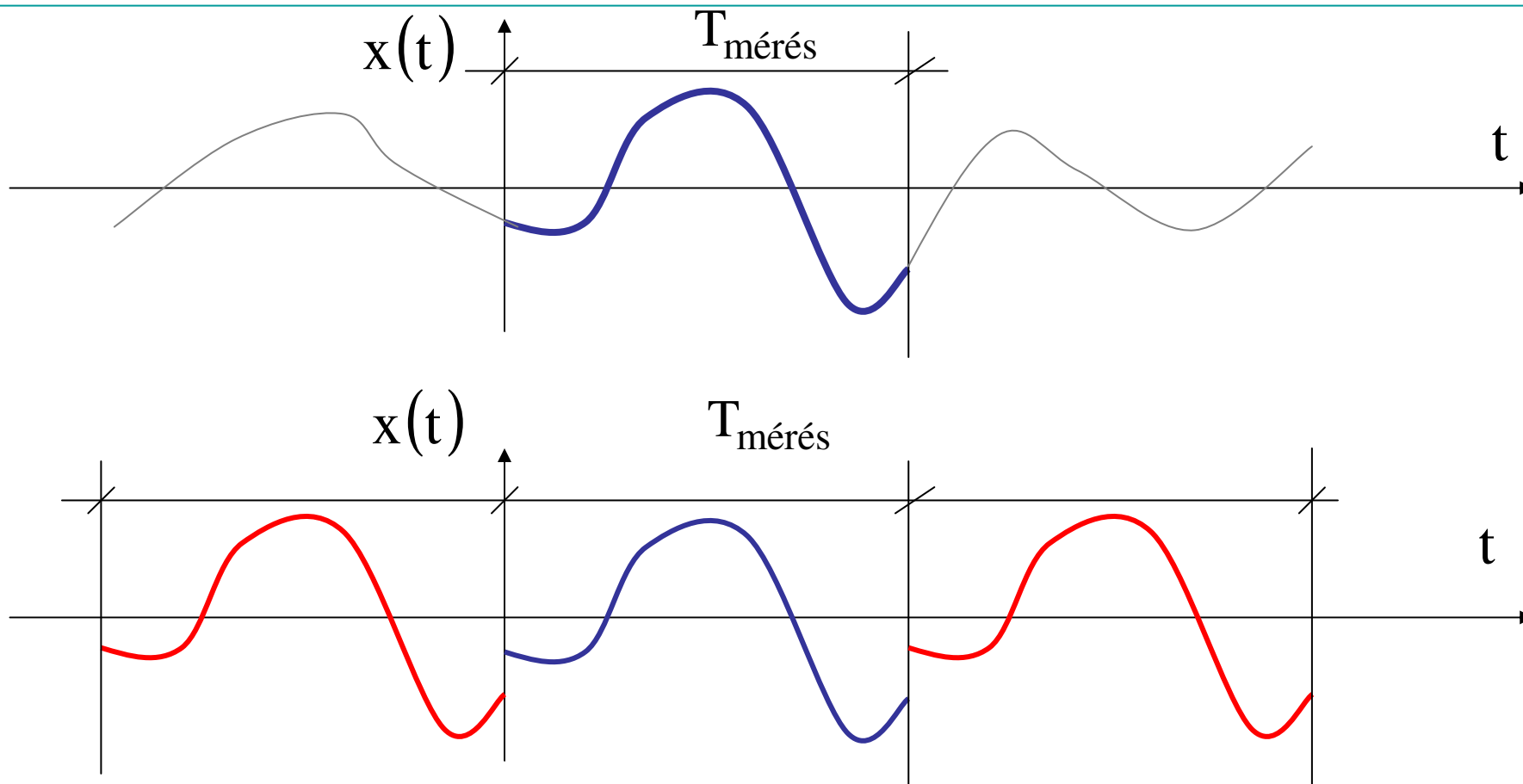
$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$X(j\omega) = \int_{t_0}^{t_1} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad \longrightarrow \quad \tilde{X}(k \cdot \Delta\omega) = \Delta T_{MV} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n \cdot \Delta T_{MV}) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n}$$

$$N = \frac{T_{MÉRÉS}}{T_{MV}} = T_{MÉRÉS} \cdot f_{MV} \quad \Delta f = \frac{1}{T_{MÉRÉS}} \quad 1 = N \cdot T_{MV} \cdot \Delta f$$

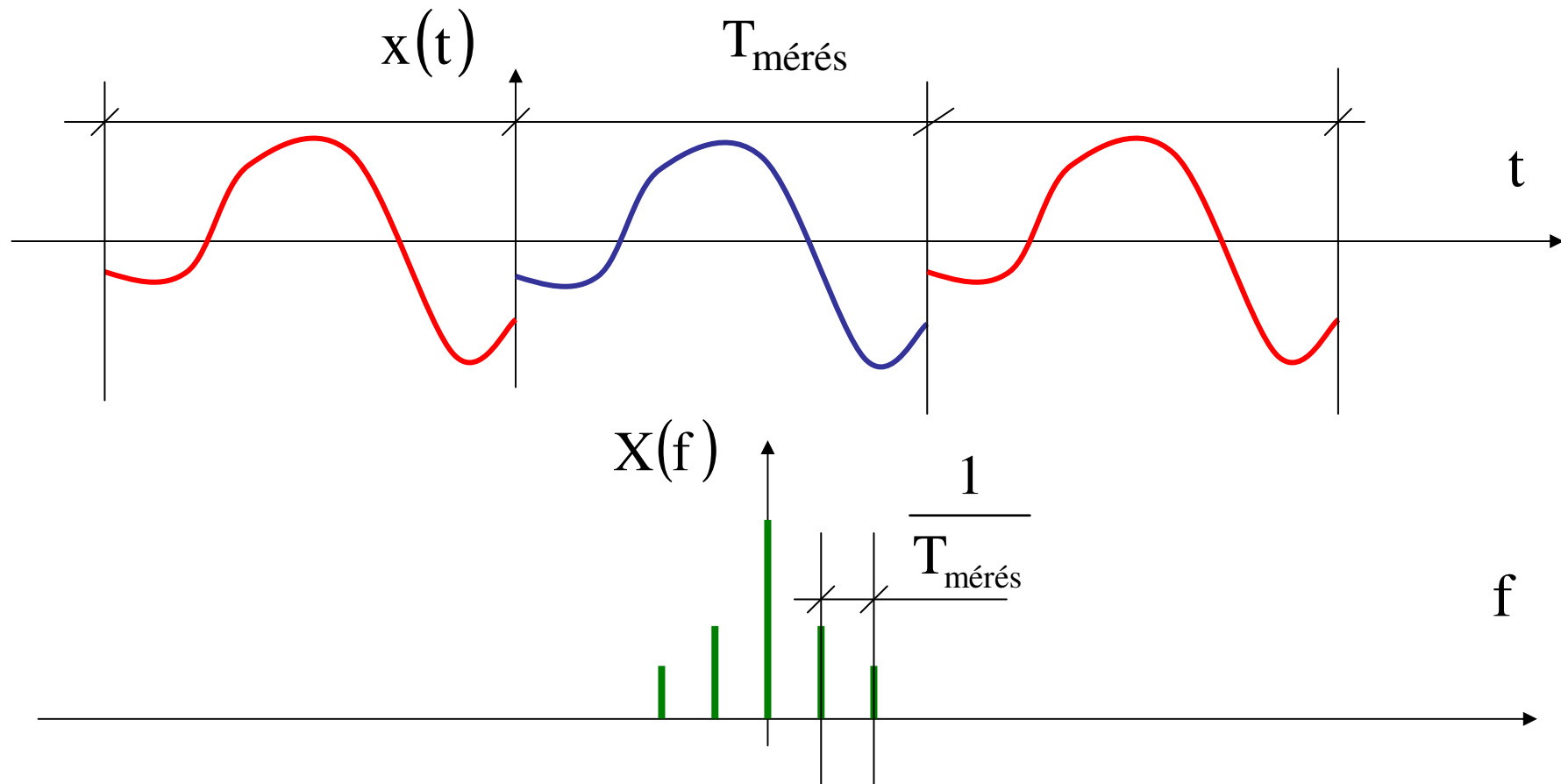
$$\left[-\frac{f_{MV}}{2}; \frac{f_{MV}}{2} \right] \quad \longrightarrow \quad \Delta f \quad \longrightarrow \quad \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \quad \longrightarrow \quad \frac{\Delta f}{f_{MV}}$$

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.



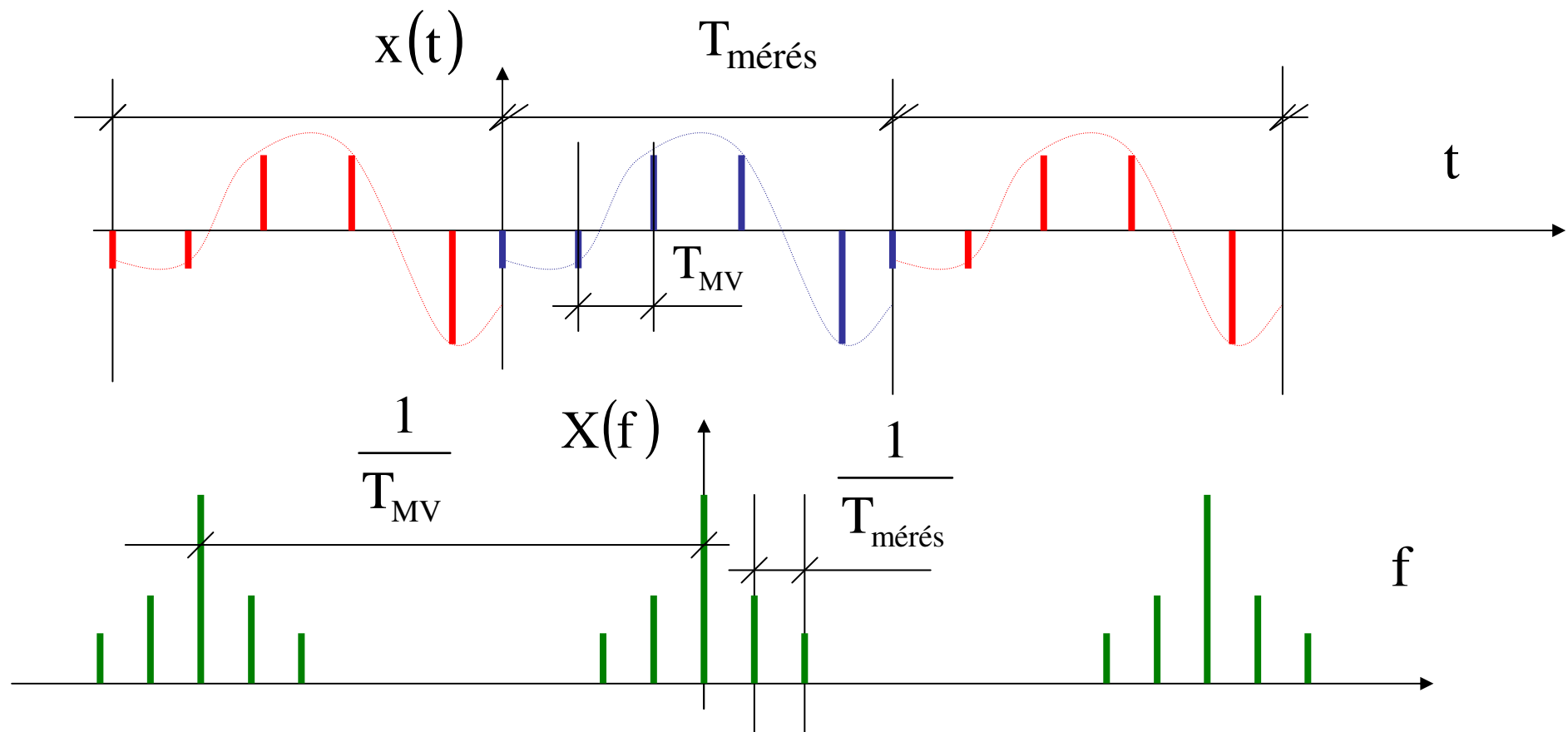
1. A mért jelszakasz periodikussá tétele

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.



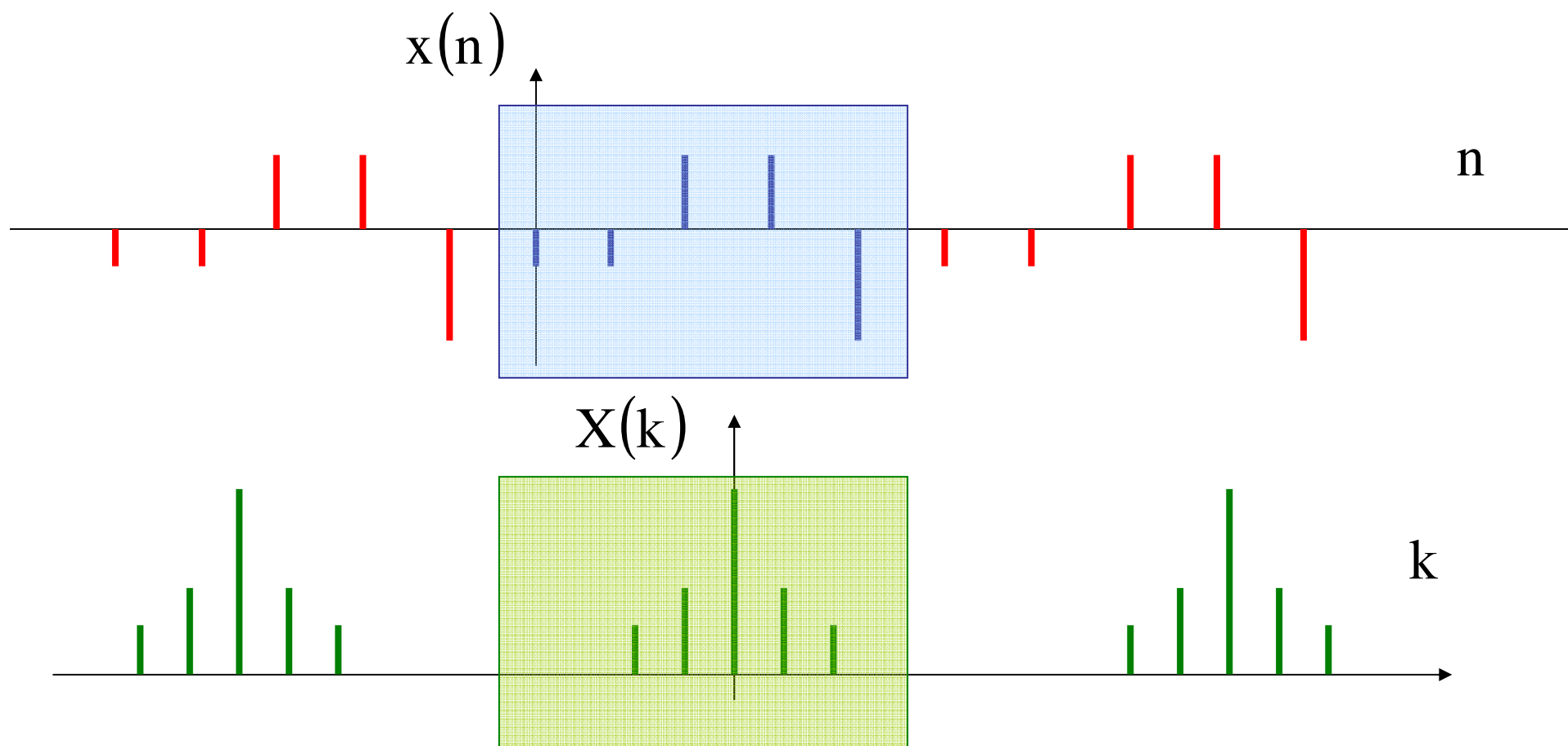
2. A periodikus jelnek vonalas spektruma van

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.



3. A mintavételezés során periodikus spektrum keletkezik

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.



4. A DFT N mintához rendel N transzformált értéket

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

A DFT főbb tulajdonságai

$$a_1 \cdot x_1(n) + a_2 \cdot x_2(n) \quad \longleftrightarrow \quad a_1 \cdot X_1(k) + a_2 \cdot X_2(k)$$

$$x(n - m) \quad \longleftrightarrow \quad e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot m} \cdot X(k)$$

$$e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot n} \cdot x(n) \quad \longleftrightarrow \quad X(k - l)$$

$$\sum_{m=m_0}^{m_0+N} x(m) \cdot y(n - m) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{N} \cdot X(k) \cdot Y(k)$$

$$x(n) \cdot y(n) \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{l=l_0}^{l_0+N} X(l) \cdot Y(k - l)$$

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

A DFT számítása közvetlenül (a definíció alapján)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} [x_r(n) + j \cdot x_i(n)] \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n\right) \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_r(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n\right) + x_i(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n\right) \right] - \\ &\quad - j \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_i(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n\right) - x_r(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n\right) \right] \end{aligned}$$

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

A DFT számítása közvetlenül (a definíció alapján)

$$k = 0 \quad X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} [x_r(n) + j \cdot x_i(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_r(n) + j \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_i(n)$$

$$k = 1 \quad X(1) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_r(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n\right) + x_i(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n\right) \right] -$$

$$- j \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_i(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n\right) - x_r(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n\right) \right]$$

$$k = N-1 \quad X(N-1) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_r(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot (N-1)}{N} \cdot n\right) + x_i(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot (N-1)}{N} \cdot n\right) \right] -$$

$$- j \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_i(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot (N-1)}{N} \cdot n\right) - x_r(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot (N-1)}{N} \cdot n\right) \right]$$

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

A DFT számítása közvetlenül (a definíció alapján - példa)

$$x(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$k = 0 \quad X(0) = \sum_{n=0}^2 x(n) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^2 \left[x(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot n\right) \right] + j \cdot \sum_{n=0}^2 \left[x(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot n\right) \right] =$$

$$= \left[1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot 0\right) + 1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot 1\right) + 1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot 2\right) \right] +$$

$$k = 1 \quad + j \cdot \left[1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot 0\right) + 1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot 1\right) + 1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot 2\right) \right] =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] + j \cdot \left[0 + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = 0$$

$$k = 2 \quad X(2) = 0$$

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

A DFT számítása közvetlenül (a definíció alapján)

```
void dft(double *xr, double *xi, double *Xr, double *Xi, int
N){
    double re, im;
    int k, n;
    for(k=0; k<N; k++){
        re=0; im=0;
        for(n=0;n<N;n++){
            re=re+xr[n]*cos(2*PI*k*n/N)+xi[n]*sin(2*PI*k*n/N);
            im=im+xi[n]*cos(2*PI*k*n/N)-xr[n]*sin(2*PI*k*n/N);
        }
        Xr[k]=re;
        Xi[k]=im;
    }
}
```

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

A DFT számítása mátrix-szorzással

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot b_n^* \quad \text{skalárszorzat}$$

$$\mathbf{x}(n) = x_n \quad \mathbf{d}_n^{k_0} = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot k_0 \cdot n} \quad \text{A vektorok komponensei}$$

$$\mathbf{X}(k) = y_k = (\mathbf{x}, \mathbf{d}^k) \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad N \text{ db skalárszorzat}$$

$$\mathbf{d}_{k,n} = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} \quad \mathbf{y} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} \quad \text{Mátrix-szorzás}$$

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

Az IDFT számítása mátrix-szorzással

$$d_{k,n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot k\cdot n} \quad \mathbf{y} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}$$

$$\frac{1}{N} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot n\cdot k} \quad \mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{y} \quad \mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{N} \cdot (\mathbf{D}^*)^T = \frac{1}{N} \cdot (\mathbf{D}^T)^*$$

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

A DFT és IDFT mátrixa N=3 esetén (példa)

$$d_{k,n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot k\cdot n}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} e^{-j\frac{2\pi}{3}\cdot 0\cdot 0} & e^{-j\frac{2\pi}{3}\cdot 0\cdot 1} & e^{-j\frac{2\pi}{3}\cdot 0\cdot 2} \\ e^{-j\frac{2\pi}{3}\cdot 1\cdot 0} & e^{-j\frac{2\pi}{3}\cdot 1\cdot 1} & e^{-j\frac{2\pi}{3}\cdot 1\cdot 2} \\ e^{-j\frac{2\pi}{3}\cdot 2\cdot 0} & e^{-j\frac{2\pi}{3}\cdot 2\cdot 1} & e^{-j\frac{2\pi}{3}\cdot 2\cdot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{3}} & e^{-j\frac{4\pi}{3}} \\ 1 & e^{-j\frac{4\pi}{3}} & e^{-j\frac{8\pi}{3}} \end{pmatrix}$$

$$e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{-j\frac{8\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

A DFT és IDFT mátrixa N=3 esetén (példa)

$$d_{k,n} = e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{N} \cdot (\mathbf{D}^*)^T = \frac{1}{N} \cdot (\mathbf{D}^T)^* \quad \longrightarrow \quad \mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

Számsorozat DFT-je mátrix-szorzással (példa)

$$x(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ellenőrzés} \longrightarrow \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

A DFT ortogonalitása (páros N)

$$(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_l) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot (l-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot m}$$

Ha $k = l$, akkor $m = 0$, ezért az összeg N

Ha $k \neq l$, akkor a megfelelő tagok párosításával

$$e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot m \cdot n} + e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot m \cdot \left(n + \frac{N}{2}\right)} = e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot m \cdot n} + e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot m \cdot n} \cdot (-1) = 0$$

Végeredményben $(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_l) = \begin{cases} N & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$ ortogonalitás

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

A gyors Fourier-transzformáció (a pontok száma 2-hatvány)

A) A számítások lebontása a Danielson-Lánczos lemma alapján

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n\right) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot (2n)\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot (2n+1)\right) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi}{\left(\frac{N}{2}\right)} \cdot \left(\frac{k}{2}\right) \cdot (2n)\right) + \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} \cdot k\right) \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi}{\left(\frac{N}{2}\right)} \cdot \left(\frac{k}{2}\right) \cdot (2n)\right) = \\
 &= \text{DFT}_{\frac{N}{2}} \left\{x_{ps}(m)\right\} + \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} \cdot k\right) \cdot \text{DFT}_{\frac{N}{2}} \left\{x_{pn}(m)\right\} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1
 \end{aligned}$$

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

A gyors Fourier-transzformáció (a pontok száma 2-hatvány)

B) A számítások elvégzése (felépítése) alulról felfelé haladva

$$\boxed{N = 1} \quad X(0) = \sum_{n=0}^0 x(n) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{1} \cdot 0 \cdot n} = x(0) \cdot 1 = x(0)$$

$\boxed{N = 2}$ Az $N = 2$ pontos DFT számítása az $N/2 = 1$ pontos DFT alapján

$$X(k) = \sum_{n=0}^1 x(n) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{2} \cdot k \cdot n} \quad k = 0, 1$$

$$X(k) = x(0) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{2} \cdot k \cdot 0} + x(1) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{2} \cdot k \cdot 1} = x(0) + e^{-j \pi \cdot k} \cdot x(1)$$

$$k = 0 \quad X(0) = x(0) + x(1)$$

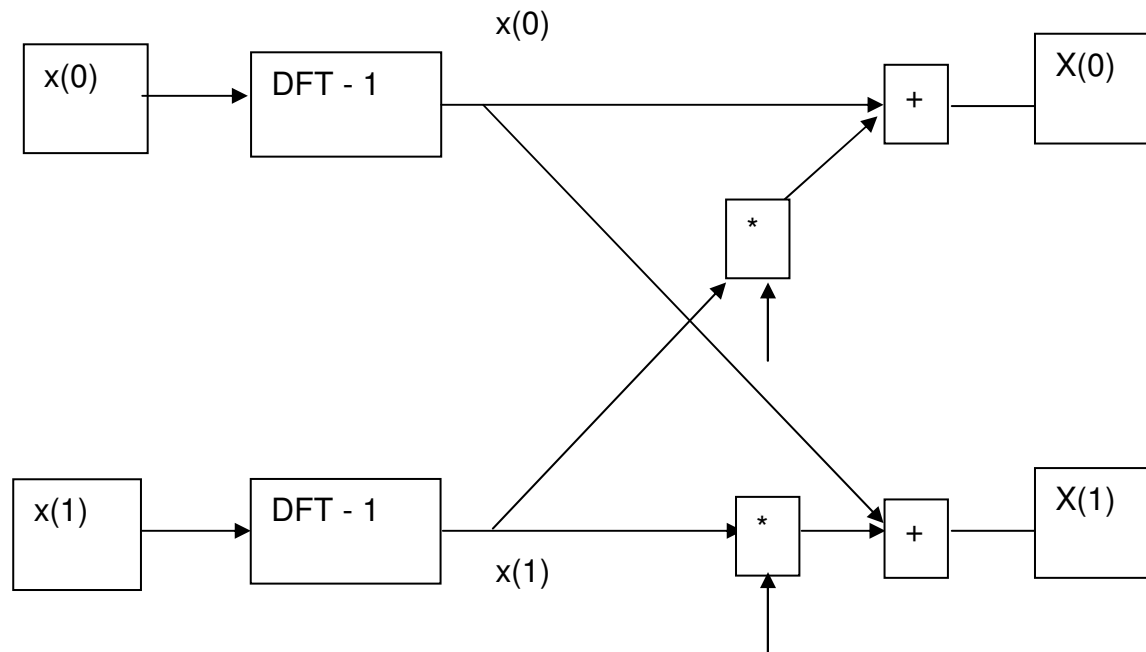
$$k = 1 \quad X(1) = x(0) + e^{-j \pi} \cdot x(1) = x(0) - x(1)$$

5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

A gyors Fourier-transzformáció (a pontok száma 2-hatvány)

$$N = 2$$

$$X(0) = x(0) + x(1) \quad X(1) = x(0) + e^{-j\pi} \cdot x(1) = x(0) - x(1)$$

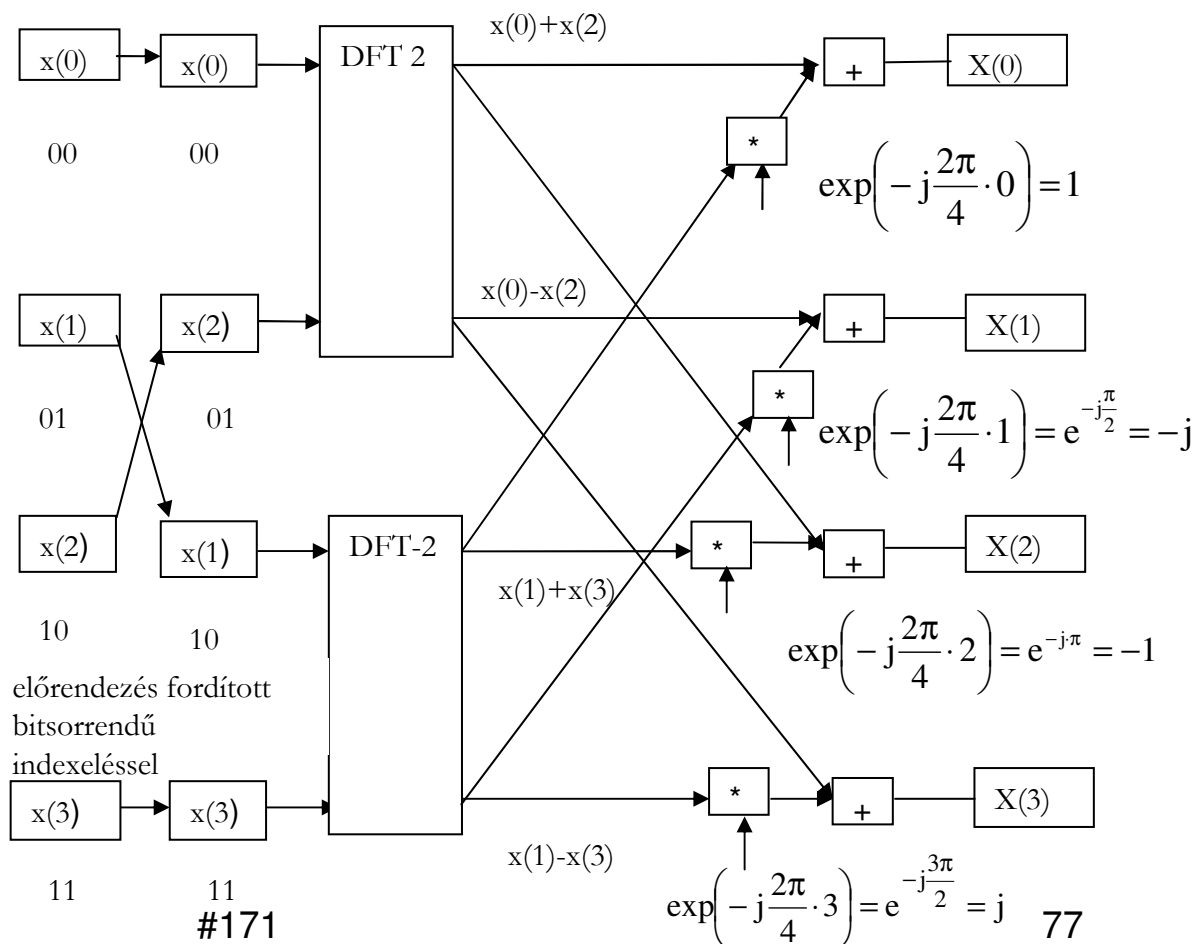


5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

A gyors Fourier-transzformáció (a pontok száma 2-hatvány)

$N = 4$

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(0) + x(2) \cdot e^{-j\pi \cdot k} \\ + e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot k} \cdot [x(1) + x(3) \cdot e^{-j\pi \cdot k}] \end{bmatrix}$$

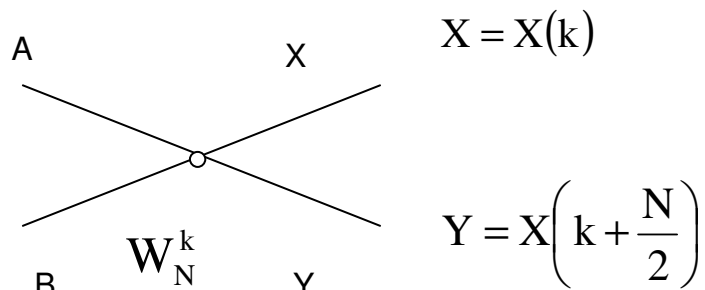
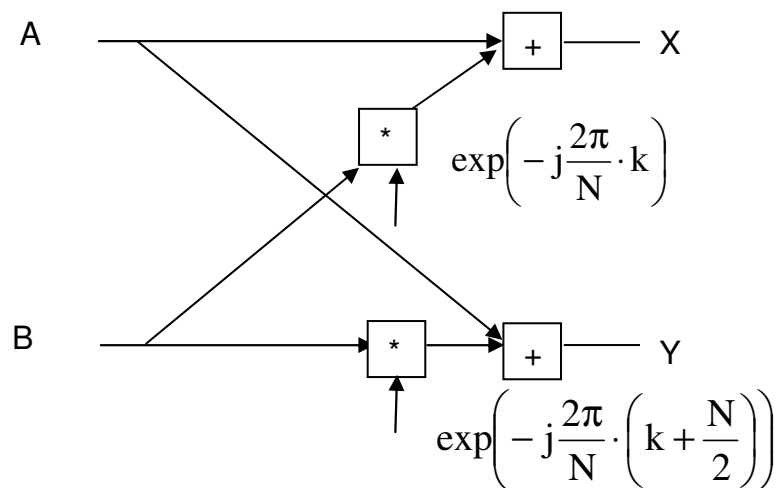


5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

A gyors Fourier-transzformáció (a pontok száma 2-hatvány)

FFT-pillangó

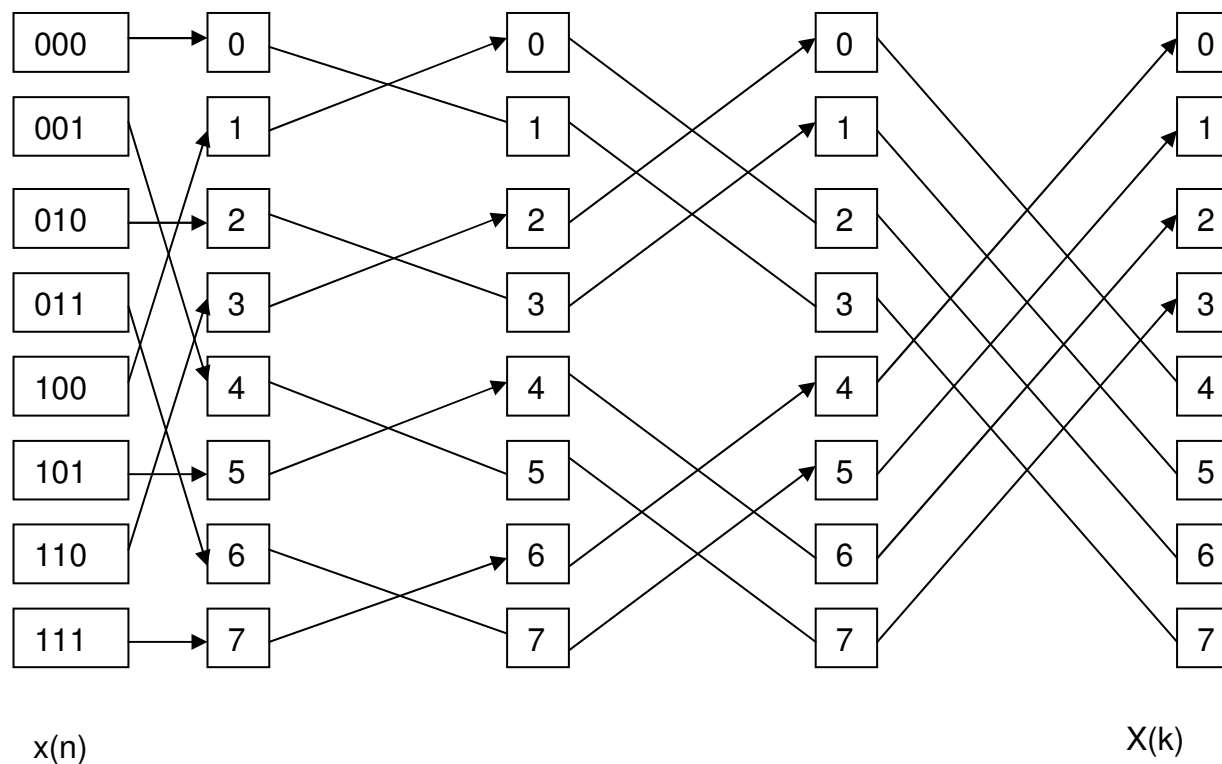
$$X = A + e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot k} \cdot B = A + W_N^k \cdot B \quad Y = A - e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot k} \cdot B = A - W_N^k \cdot B \quad W_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot k}$$



5. A diszkrét Fourier-transzformáció. A DFT mátrix alakja, számítása, a gyors Fourier-transzformáció.

A gyors Fourier-transzformáció (a pontok száma 2-hatvány)

Jelfolyamábra az $N=8$ pontos FFT algoritmushoz



A diszkrét Walsh–Hadamard-transzformáció

$$\mathbf{y} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{x}$$

$$w_{i,j} = (-1)^{E(i,j)} \quad E(i,j) = \sum_{k=0}^{n-1} u(i)_k \cdot v(j)_k$$

$$n = \log_2(N)$$

$$i = u_{n-1} \cdot 2^{n-1} + u_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + u_k \cdot 2^k + \dots + u_0$$

$$j = v_{n-1} \cdot 2^{n-1} + v_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + v_k \cdot 2^k + \dots + v_0$$

A diszkrét Walsh–Hadamard-transzformáció

$$w_{i,j} = (-1)^{E(i,j)} \quad E(i,j) = \sum_{k=0}^{n-1} u(i)_k \cdot v(j)_k \quad \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} \\ w_{10} & w_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

sorindex	sorindex binárisan	oszlopindex	oszlopindex binárisan	a bitvektorok skalárszorzata	a mátrix-elem értéke	a mátrix-elem helye
i	u_0	j	v_0	$u_0 \cdot v_0$	$(-1)^{u_0 \cdot v_0}$	$w_{i,j}$
0	0	0	0	0	1	w_{00}
0	0	1	1	0	1	w_{01}
1	1	0	0	0	1	w_{10}
1	1	1	1	1	-1	w_{11}

A diszkrét Walsh–Hadamard-transzformáció

$$\mathbf{W}_4 = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & w_{03} \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{30} & w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

sor-index	sorindex binárisan	oszlopindex	oszlop index binárisan	a bitvektorok skálár-szorzata	a mátrix elem értéke	a mátrix elem 'helye'
i	$u_1 u_0$	j	$v_1 v_0$	$u_0 \cdot v_0 + u_1 \cdot v_1$	$(-1)^{u_0 \cdot v_0}$	w_{ij}
0	0 0	0	0 0	0	1	w_{00}
0	0 0	1	0 1	0	1	w_{01}
0	0 0	2	1 0	0	1	w_{02}
0	0 0	3	1 1	0	1	w_{03}

A diszkrét Walsh–Hadamard-transzformáció

$$\mathbf{W}_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_2 & \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_2 & -\mathbf{W}_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{W}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{W}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{W}_{\frac{N}{2}} & -\mathbf{W}_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix}$$

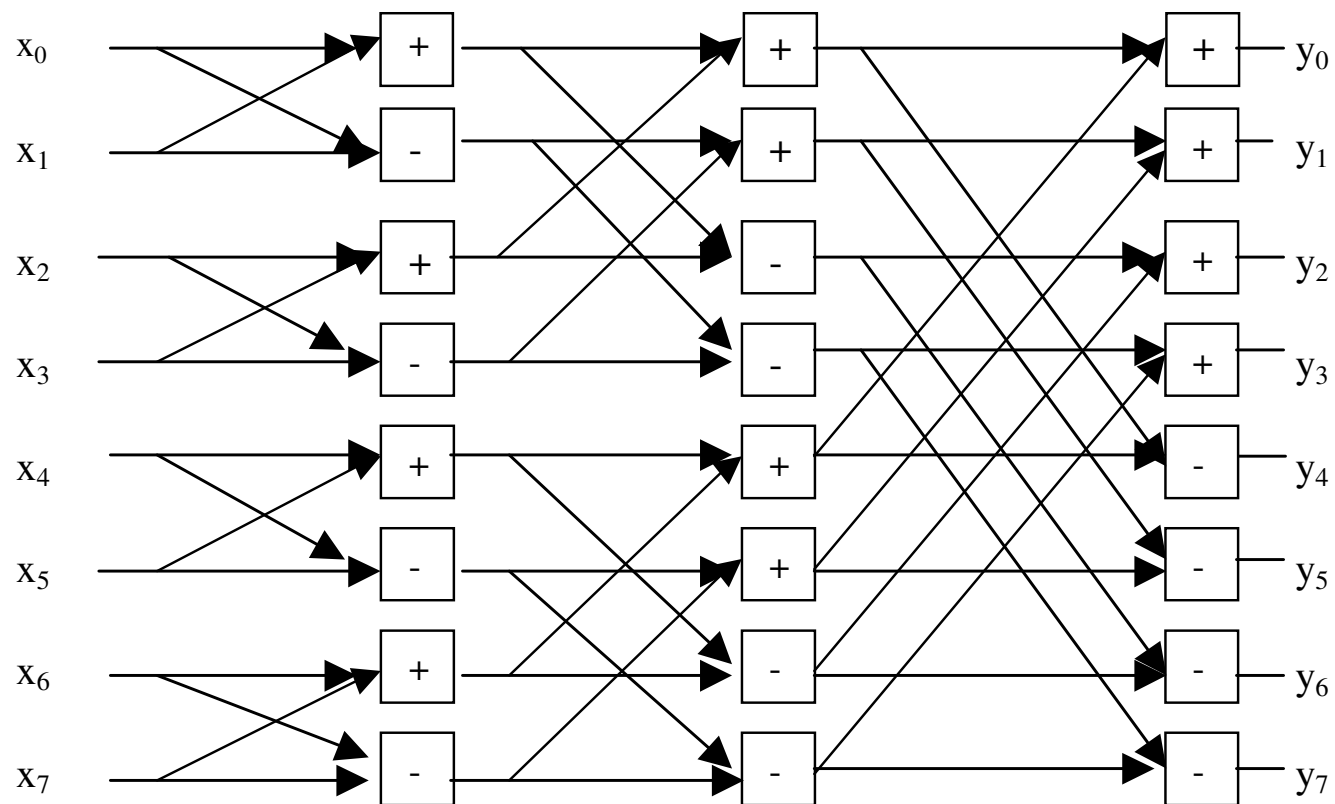
$$\mathbf{W}_4^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{W}_4^T = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{y}$$

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{N} \cdot \mathbf{W}_N^T$$

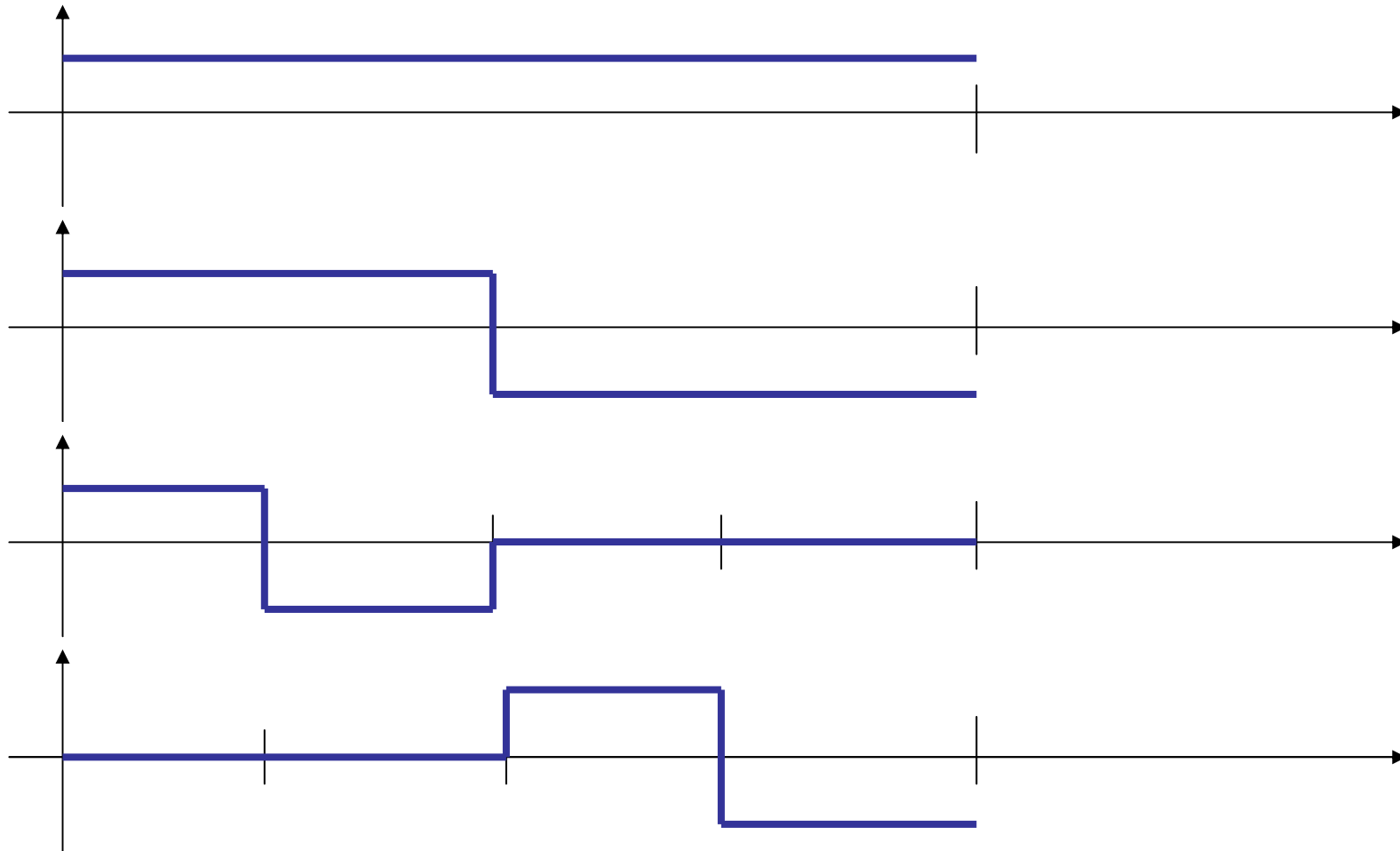
A diszkrét Walsh–Hadamard-transzformáció



A diszkrét Haar-transzformáció

$$\begin{aligned}
 H_0^0(x) = h_0(x) &= 1 & 0 \leq x \leq 1 & & H_0^1(x) = h_1(x) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \\
 H_1^0(x) = h_2(x) &= \begin{cases} \sqrt{2} & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} & & & H_1^1(x) = h_3(x) &= \begin{cases} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ -\sqrt{2} & \frac{3}{4} < x \leq 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \\
 H_2^0(x) = h_4(x) &= \begin{cases} 2 & 0 \leq x \leq \frac{1}{8} \\ -2 & \frac{1}{8} < x \leq \frac{1}{4} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} & & & H_r^s(x) = h_{2^r+s}(x) &= \begin{cases} 2^{\frac{r}{2}} & s \cdot 2^{-r} \leq x \leq \frac{s+1}{2} \cdot 2^{-r} \\ -2^{\frac{r}{2}} & \frac{s+1}{2} \cdot 2^{-r} < x \leq (s+1) \cdot 2^{-r} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}
 \end{aligned}$$

A diszkrét Haar-transzformáció



A diszkrét Haar-transzformáció

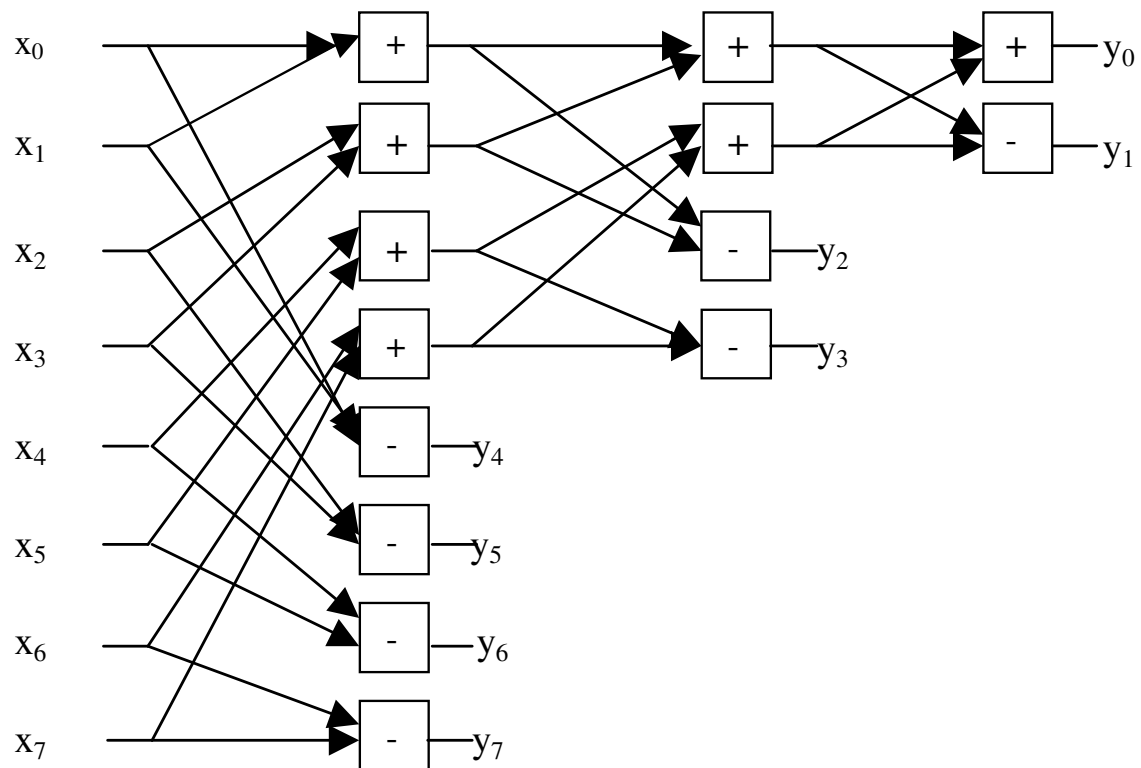
$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{N} \cdot \mathbf{H}^T$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{y}$$

A diszkrét Haar-transzformáció



A diszkrét koszinusz-transzformáció

$$X_C(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot C(k) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \cos\left[\frac{\pi \cdot k}{N} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} C(k) \cdot X_C(k) \cdot \cos\left[\frac{\pi \cdot k}{N} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$C(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & k = 0 \\ 1 & k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$c_{k,n} = \cos\left[\frac{\pi \cdot k}{N} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \quad k, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

A diszkrét koszinusz-transzformáció

$$c_{k,n} = \cos \left[\frac{\pi \cdot k}{N} \cdot \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \quad k, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$C(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & k = 0 \\ 1 & k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad C = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

A diszkrét koszinusz-transzformáció

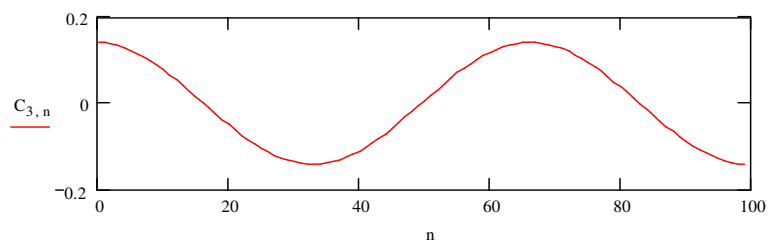
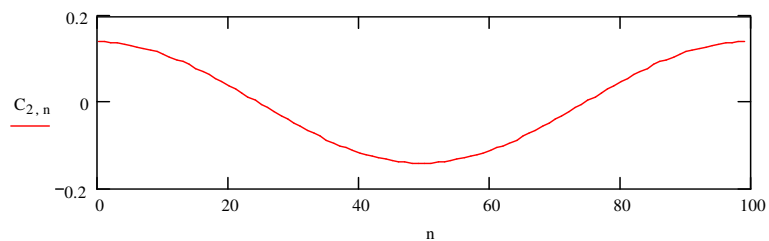
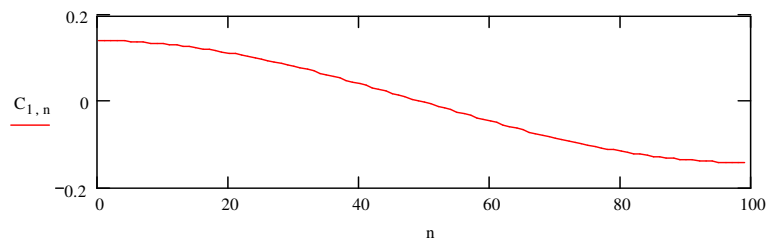
$$c_{k,n} = \cos \left[\frac{\pi \cdot k}{N} \cdot \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \quad k, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$C(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & k = 0 \\ 1 & k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$\mathbf{C} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

A diszkrét koszinusz-transzformáció



7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

IIR-szűrők

Cél: adott átviteli karakterisztikájú analóg szűrőt közelítsünk az IIR-szűrővel

1. módszer: az IIR-szűrő impulzusválasz-függvénye minél pontosabban közelítse meg az analóg szűrő súlyfüggvényét

2. módszer: az analóg rendszert leíró állandó együtthatós, lineáris differenciálegyenlet közelítése differenciaegyenlettel

Eredmény: eltérő jellemzőjű IIR-szűrők azonos analóg szűrő esetén.

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A súlyfüggvény közelítése az impulzusválasz-függvénnyel

$$1. \quad u_{BE}(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

$$2. \quad U_{BE}(s) = R \cdot C \cdot U_C(s) + U_C(s)$$

$$3. \quad H(s) = \frac{U_C(s)}{U_{BE}(s)} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot s} = \frac{\frac{1}{R \cdot C}}{s + \frac{1}{R \cdot C}}$$

$$4. \quad h(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$$

általános esetben

$$H(s) = \sum_{k=1}^P \frac{a_k}{s - s_k}$$

$$\frac{a}{s - s_k} \longrightarrow h(t) = a \cdot e^{s_k \cdot t}$$

elsőfokú alaptag és súlyfüggvénye

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A súlyfüggvény közelítése az impulzusválasz-függvénnyel

A
$$\frac{a}{s - s_k}$$

elsőfokú alaptagok

D
$$\frac{a}{1 - b \cdot z^{-1}}$$

A
$$h(t) = a \cdot e^{s_k \cdot t}$$

súlyfüggvény

D
$$h(n) = a \cdot (b)^n \cdot u(n)$$

impulzusválasz-függvény

Legyen $t = n \cdot T_{MV}$ ekkor a súlyfüggvény mintái

$$h(n \cdot T_{MV}) = a \cdot e^{s_k \cdot n \cdot T_{MV}}$$

ami, ha

$$b = e^{s_k \cdot T_{MV}}$$

az impulzusválasz-függvény

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A súlyfüggvény közelítése az impulzusválasz-függvénnyel

a leképezés általánosan az **s-síkról** a **z-síkra**: $z = e^{s \cdot T_{MV}}$

$$H(s) = \sum_{k=1}^P \frac{a_k}{s - s_k} \rightarrow H(z) = \sum_{k=1}^P \frac{a_k}{1 - e^{s_k \cdot T_{MV}} \cdot z^{-1}}$$

$$\frac{a}{s - s_k} \quad \longrightarrow \quad \frac{a}{1 - b \cdot z^{-1}}$$

$b = e^{s_k \cdot T_{MV}}$

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A súlyfüggvény közelítése az impulzusválasz-függvénnyel

Példa: a diszkrét idejű rendszer amplitúdókarakterisztikája az elsőfokú alaptag esetén

$$H_F(s) = \frac{a_k}{s - s_k} \quad s_k = \sigma_k + j \cdot \omega_k \quad H_D(z) = \frac{a_k}{1 - e^{s_k \cdot T_{MV}} \cdot z^{-1}}$$

Cél a $|H_F(s)|_{s=j\omega}$ $|H_D(z)|_{z=e^{j\omega}}$ kiszámítása és összehasonlítása:

$$|H_F(j\omega)| = \frac{|a_k|}{|j\omega - s_k|} = \frac{|a_k|}{|j\omega - (\sigma_k + j\omega_k)|} = \frac{|a_k|}{\sqrt{(\omega - \omega_k)^2 + \sigma_k^2}}$$

$$|H_D(e^{j\omega})| = \frac{|a_k|}{|1 - e^{s_k \cdot T_{MV}} \cdot e^{-j\omega}|} = \frac{|a_k|}{|1 - e^{(\sigma_k + j\omega_k) \cdot T_{MV}} \cdot e^{-j\omega}|} = \frac{|a_k|}{\sqrt{1 - 2 \cdot e^{\sigma_k \cdot T_{MV}} \cdot \cos(\omega - \omega_k \cdot T_{MV}) + e^{2 \cdot \sigma_k \cdot T_{MV}}}}$$

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A súlyfüggvény közelítése az impulzusválasz-függvénnyel

Példa: a diszkrét idejű rendszer amplitúdókarakterisztikája az elsőfokú alaptag esetén

$$-\frac{1}{2} \frac{2\pi}{T_{MV}} \leq \omega_F \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{T_{MV}}$$

$$T_{MV}$$

$$-\pi \leq \omega \leq \pi$$

$$\tilde{H}(j\omega) = \frac{1}{T_{MV}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(j\omega + k \cdot \omega_{MV})$$



$$H(j\omega) \approx \tilde{H}(j\omega) \quad |\omega| \leq \frac{\omega_{MV}}{2}$$

$$\left| H_F(s) \right|_{s=j\omega} \quad \left| H_D(z) \right|_{z=e^{j\omega}}$$

összehasonlítása

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A súlyfüggvény közelítése az impulzusválasz-függvénnyel

Példa: konkrét esetre alkalmazva

$$H(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \quad \sigma_k = -\frac{1}{RC} \quad (\omega_k = 0)$$

$$|H_F(j\omega)| = \frac{1}{RC \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}}$$

$$|H_F(j\omega)|^{\text{dB}} = 20 \cdot \log \left(\frac{1}{RC \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}} \right)$$

$$|H_D(e^{j\omega})| = \frac{1}{RC \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot e^{-\frac{T_{MV}}{RC}} \cdot \cos(\omega) + e^{-\frac{2 \cdot T_{MV}}{RC}}}}$$

$$|H_D(e^{j\omega})|^{\text{dB}} = 20 \cdot \log \left(\frac{1}{RC \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot e^{-\frac{T_{MV}}{RC}} \cdot \cos(\omega) + e^{-\frac{2 \cdot T_{MV}}{RC}}}} \right)$$

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A súlyfüggvény közelítése az impulzusválasz-függvénnyel

Példa: konkrét esetre alkalmazva

$$|H_F(j\omega)| = 1 \quad |H_D(e^{j\omega})| = a = \frac{1}{RC \sqrt{1 - 2 \cdot e^{-\frac{T_{MV}}{RC}} + e^{-\frac{2 \cdot T_{MV}}{RC}}}} \quad \omega = 0$$

$$|H_D(e^{j\omega})|^{\text{dB}} = 20 \cdot \log \left(\frac{1}{a \cdot RC \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot e^{-\frac{T_{MV}}{RC}} \cdot \cos(\omega) + e^{-\frac{2 \cdot T_{MV}}{RC}}}} \right) \quad \text{normalizálás}$$

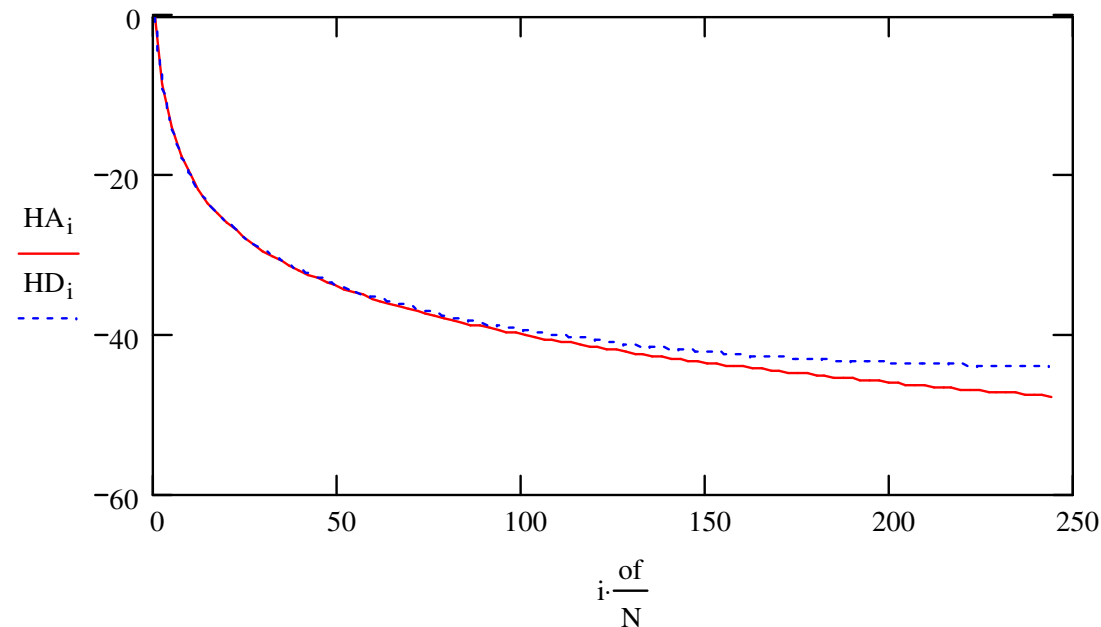
a folytonos és a diszkrét esetben az egymásnak megfelelő N frekvencián értékeljük ki a függvényeket:

$$\frac{\pi}{T_{MV}} \longrightarrow \boxed{\frac{\pi}{N \cdot T_{MV}}} \quad \boxed{\frac{\pi}{N}}$$

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A súlyfüggvény közelítése az impulzusválasz-függvénnyel

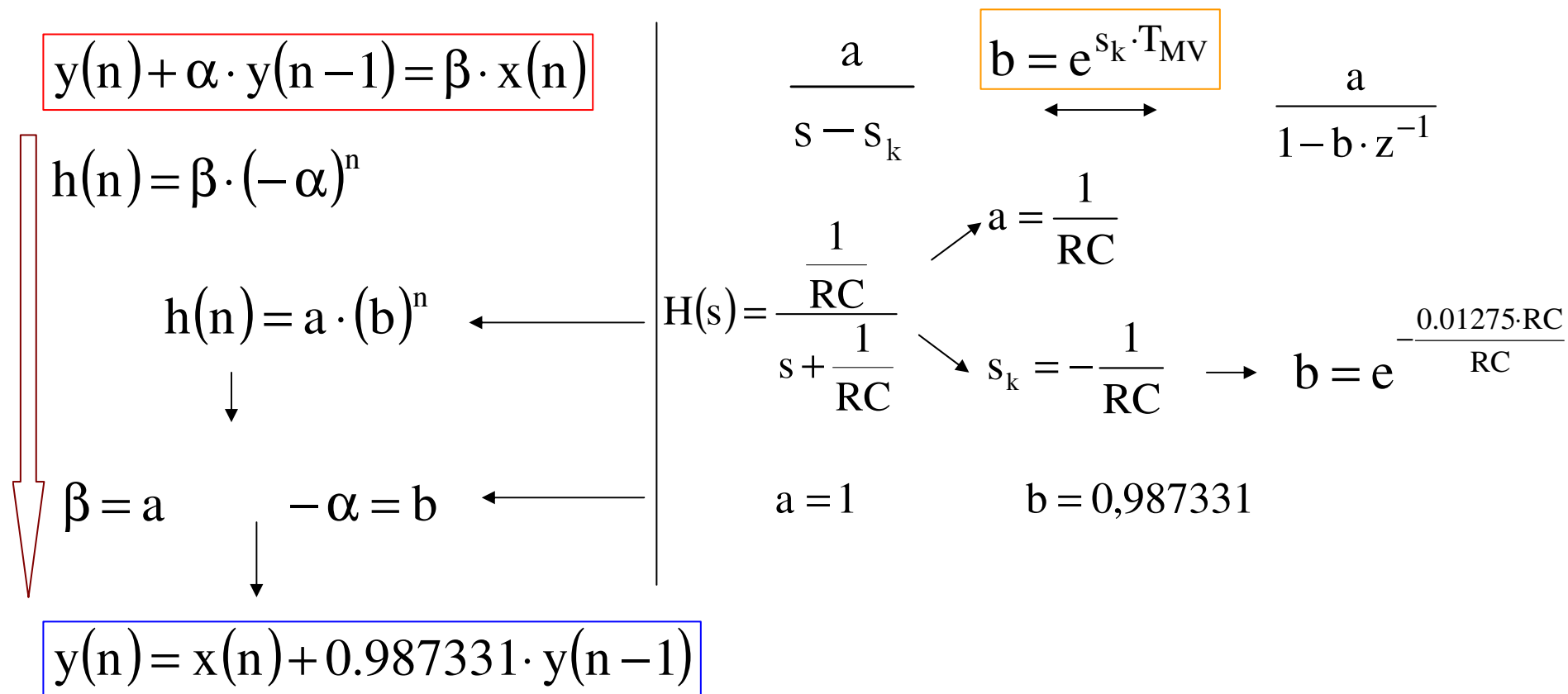
Példa: konkrét esetre alkalmazva (RC = 1 s, a pontok számára $N = 100$, a mintavételi idő $T_{MV} = 0,01275$ RC = 0,01275 s)



7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A súlyfüggvény közelítése az impulzusválasz-függvénnyel

Példa: az IIR-szűrő differencia-egyenlete ($RC = 1$ s, $T_{MV} = 0,01275$ RC)



7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A differenciálegyenlet közelítése differenciaegyenlettel

$$a \cdot \frac{dy(t)}{dt} + b \cdot y(t) = c \cdot x(t) \quad \longrightarrow \quad y'(t) = \frac{c}{a} \cdot x(t) - \frac{b}{a} \cdot y(t)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(t) dt + y(t_0) \quad \longrightarrow \quad t_0 = (n-1) \cdot T_{MV} \quad t_1 = n \cdot T_{MV} \quad + \text{trapéz-szabály}$$

$$y(n \cdot T_{MV}) = \frac{y'(n \cdot T_{MV}) + y'[(n-1) \cdot T_{MV}]}{2} \cdot T_{MV} + y[(n-1) \cdot T_{MV}]$$

$$y'(n \cdot T_{MV}) = \frac{c}{a} \cdot x(n \cdot T_{MV}) - \frac{b}{a} \cdot y(n \cdot T_{MV})$$

$$y(n \cdot T_{MV}) = \frac{T_{MV}}{2} \cdot \left\{ \frac{c}{a} \cdot x(n \cdot T_{MV}) - \frac{b}{a} \cdot y(n \cdot T_{MV}) + \frac{c}{a} \cdot x[(n-1) \cdot T_{MV}] - \frac{b}{a} \cdot y[(n-1) \cdot T_{MV}] \right\} + y[(n-1) \cdot T_{MV}]$$

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A differenciálegyenlet közelítése differenciaegyenlettel

$$y(n \cdot T_{MV}) = \frac{T_{MV}}{2} \cdot \left\{ \frac{c}{a} \cdot x(n \cdot T_{MV}) - \frac{b}{a} \cdot y(n \cdot T_{MV}) + \frac{c}{a} \cdot x[(n-1) \cdot T_{MV}] - \frac{b}{a} \cdot y[(n-1) \cdot T_{MV}] \right\} + y[(n-1) \cdot T_{MV}]$$



$$y(n) - y(n-1) = \frac{T_{MV}}{2} \cdot \left\{ \frac{c}{a} \cdot [x(n) + x(n-1)] - \frac{b}{a} \cdot [y(n) + y(n-1)] \right\}$$



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{c}{a} \cdot \frac{T_{MV}}{2} \cdot (1 + z^{-1})}{1 - z^{-1} + \frac{b}{a} \cdot \frac{T_{MV}}{2} \cdot (1 + z^{-1})} = \frac{c}{a \cdot \frac{2}{T_{MV}} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + b}$$

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A differenciálegyenlet közelítése differenciaegyenlettel

$$a \cdot \frac{dy(t)}{dt} + b \cdot y(t) = c \cdot x(t)$$

$$a \cdot s \cdot Y(s) + b \cdot Y(s) = c \cdot X(s)$$



$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{c}{a \cdot s + b}$$



$$s = \frac{2}{T_{MV}} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{c}{a \cdot \frac{2}{T_{MV}} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + b}$$

bilinéáris leképezés

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A differenciálegyenlet közelítése differenciaegyenlettel

Példa a bilineáris leképezés alkalmazására

$$H(s) = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

$a = \frac{1}{RC}$

$$s = \frac{2}{T_{MV}} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{a}{\frac{2}{T_{MV}} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + a} = \frac{a \cdot T_{MV} \cdot (1 + z^{-1})}{(a \cdot T_{MV} + 2) + (a \cdot T_{MV} - 2) \cdot z^{-1}} = \frac{b \cdot (1 + z^{-1})}{c + d \cdot z^{-1}}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b \cdot (1 + e^{-j\omega})}{c + d \cdot e^{-j\omega}} \right| = \sqrt{\frac{2 \cdot b^2 + 2 \cdot b^2 \cdot \cos(\omega)}{c^2 + 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos(\omega) + d^2}}$$

$$|H_F(j\omega)| = \frac{1}{RC \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{T_{MV}}{RC} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos(\omega)}{\left(\frac{T_{MV}}{RC}\right)^2 + 4 + \left(\left(\frac{T_{MV}}{RC}\right)^2 - 4\right) \cdot \cos(\omega)}}$$

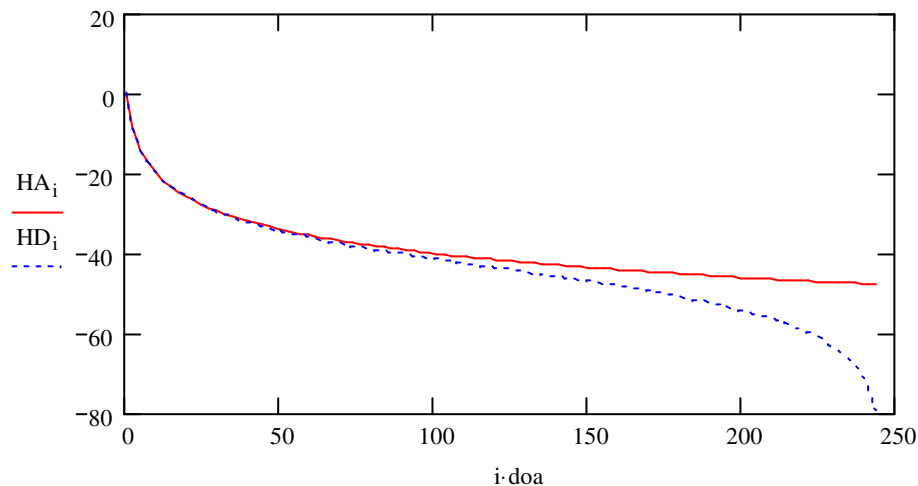
7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A differenciálegyenlet közelítése differenciaegyenlettel

Példa a bilineáris leképezés alkalmazására ($RC = 1$ s, $TMV = 0,01275 RC$)

$$|H_F(j\omega)| = \frac{1}{RC \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{T_{MV}}{RC} \cdot \frac{1 + \cos(\omega)}{\sqrt{\left(\frac{T_{MV}}{RC}\right)^2 + 4 + \left(\left(\frac{T_{MV}}{RC}\right)^2 - 4\right) \cdot \cos(\omega)}}$$



7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A differenciálegyenlet közelítése differenciaegyenlettel

Példa a bilineáris leképezés alkalmazására (RC = 1 s, TMV = 0,01275 RC), megvalósítás az elsőfokú differenciaegyenlet legáltalánosabb alakjával

$$y(n) = -a_1 \cdot y(n-1) + b_0 \cdot x(n) + b_1 \cdot x(n-1)$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1}}{1 + a_1 \cdot z^{-1}}$$



$$b_0 = \frac{b}{c} = 0.00633461$$

$$b_1 = \frac{b}{c} = 0.00633461$$

$$a_1 = \frac{d}{c} = -0.987331$$

KF GAMFK AAI

$$H(z) = \frac{b \cdot (1 + z^{-1})}{c + d \cdot z^{-1}}$$

$$b = \frac{T_{MV}}{RC} = 0,01275$$

$$c = \frac{T_{MV}}{RC} + 2 = 2,01275$$

$$d = \frac{T_{MV}}{RC} - 2 = -1,98725$$

#171

109

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

FIR-szűrők

1. példa $h(n) = a \cdot \delta(n) + b \cdot \delta(n-1) + b \cdot \delta(n-1) + a \cdot \delta(n-3)$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^3 h(n) \cdot e^{-j\omega n} = e^{-j\omega \frac{3}{2}} \cdot \left(2b \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + 2a \cdot \cos\left(\frac{3\omega}{2}\right) \right)$$

2. példa $h(n) = a \cdot \delta(n) + b \cdot \delta(n-1) + c \cdot \delta(n-2) + b \cdot \delta(n-3) + a \cdot \delta(n-4)$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^4 h(n) \cdot e^{-j\omega n} = e^{-j\omega \cdot 2} \cdot (c + 2b \cdot \cos(\omega) + 2a \cdot \cos(2 \cdot \omega))$$

3. példa $h(n) = a \cdot \delta(n) + b \cdot \delta(n-1) - b \cdot \delta(n-1) - a \cdot \delta(n-3)$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^3 h(n) \cdot e^{-j\omega n} = j \cdot e^{-j\omega \frac{3}{2}} \cdot \left(2b \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) + 2a \cdot \sin\left(\frac{3\omega}{2}\right) \right)$$

4. példa $h(n) = a \cdot \delta(n) + b \cdot \delta(n-1) + 0 \cdot \delta(n-2) - b \cdot \delta(n-3) - a \cdot \delta(n-4)$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^4 h(n) \cdot e^{-j\omega n} = j \cdot e^{-j\omega \cdot 2} \cdot (2b \cdot \sin(\omega) + 2a \cdot \sin(2 \cdot \omega))$$

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

FIR-szűrők

A példák általánosíthatók, pl. páros szimmetria és páros N értékre:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} 2 \cdot h(n) \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right]$$

Látható, hogy a szimmetrikus esetben: $\varphi(\omega) = -\text{arc}\{H(e^{j\omega})\} = \frac{N-1}{2} \cdot \omega$

az antiszimmetrikus esetben: $\varphi(\omega) = -\text{arc}\{H(e^{j\omega})\} = \frac{N-1}{2} \cdot \omega + \frac{\pi}{2}$

Megállapítás: a fázis a digitális körfrekvencia lineáris függvénye, ezért az ilyen FIR-szűrőket lineáris fázisúaknak nevezzük.

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A FIR-szűrők tervezése az időtartományban ablakfüggvényekkel

A tervezés lépései:

1. Az ideális esetnek megfelelő, végtelen sor meghatározása
2. Az N pontszám megválasztása (tipikusan páratlan szám)
3. Az ablakfüggvény kiválasztása
4. Az ideális impulzusválasz-függvény eltolása N-nek megfelelően
5. A $\tilde{H}(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})$ eltérés kiértékelése
6. Ha az eltérés nem elfogadható, GOTO 2, egyébként STOP.

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A FIR-szűrők tervezése az időtartományban ablakfüggvényekkel

Példa aluláteresztő szűrő tervezésére

$$h_{LP}(n) = \frac{1}{\alpha} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha} n\right)}{\frac{\pi}{\alpha} n} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \longrightarrow \quad \text{véges sok tag} \quad \longrightarrow \quad \tilde{h}_{LP}(n) = h_{LP}(n) \cdot w_E(n)$$

$$w_E(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \left| W_E(e^{j\omega}) \right| = \frac{\left| \sin\left(\frac{N}{2} \cdot \omega\right) \right|}{\left| \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|} \quad \text{arc}\{W_E(e^{j\omega})\} = \frac{N-1}{2} \cdot \omega$$

$$\tilde{H}_{LP}(e^{j\omega}) = H_{LP}(e^{j\omega}) * W_E(e^{j\omega}) \quad \longrightarrow \quad w(n)$$

megválasztása:

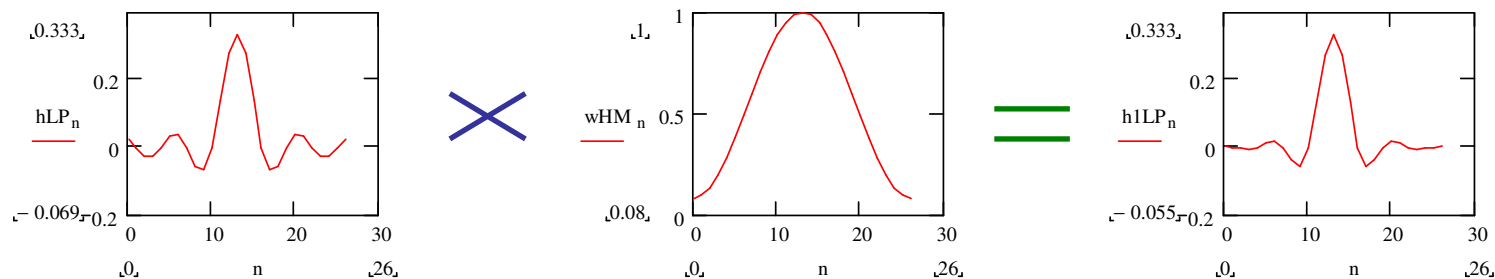
- Hamming-ablak
- Hanning-ablak
- Dolph-Chebisev-ablak
- Kaiser-ablak

...

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

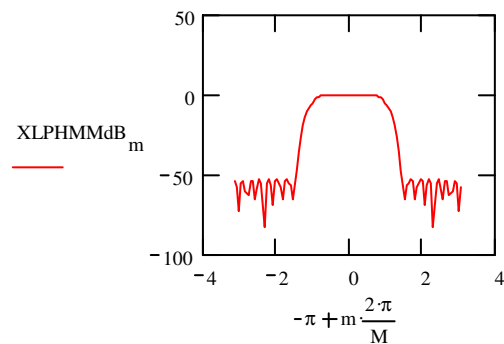
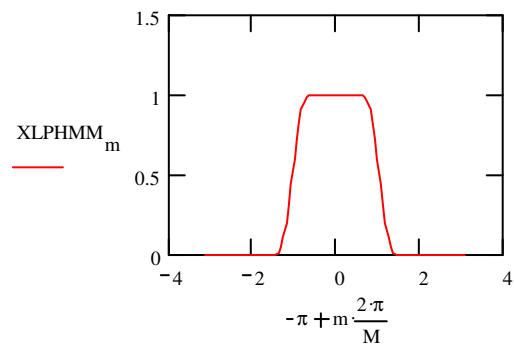
A FIR-szűrők tervezése az időtartományban ablakfüggvényekkel

Példa: Aluláteresztő szűrő Hamming-ablakkal



$h_{1LP} =$

0	0
1	$1.696 \cdot 10^{-3}$
2	0
3	$-3.325 \cdot 10^{-3}$
4	$-5.394 \cdot 10^{-3}$
5	0
6	0.013
7	0.019
8	0
9	-0.039
10	-0.055
11	0
12	0.131
13	0.272
14	0.333
15	0.272
16	0.131
17	0
18	-0.055
19	-0.039
20	0
21	0.019
22	0.013
23	0
24	$-5.394 \cdot 10^{-3}$
25	$-3.325 \cdot 10^{-3}$
26	0
27	$1.696 \cdot 10^{-3}$



7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

Gördülő (rekurzív) DFT

A feladat:

a jelenlegi N mintával számolt N pontos DFT ismeretében hogyan kell az új, $(N+1)$. mintát is tartalmazó N pontos sorozat DFT-jét meghatározni?

Megoldás:

Tegyük fel, hogy az m -edik lépéshez (időponthoz) rendelt $X_m(k)$ DFT-t az $x(m), x(m+1), \dots, x(m+N-1)$ mintákkal számítottuk ki.

Az új, $x(m+N)$ minta érkezése után a feladat az $X_{m+1}(k)$ DFT meghatározása

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

Gördülő (rekurzív) DFT

$$\begin{aligned}
 X_{m+1}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(m+n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot n} = \\
 &= x(m+1) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot (1-1)} + \dots + x(m+1+n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot (n+1-1)} + \dots + x(m+N-1) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot (N-1-1)} + \\
 &+ x(m+N) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot (N-1)} = x(m+1) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k} + \dots + x(m+1+n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot (n+1)} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k} + \\
 &+ \dots + x(m+N-1) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot (N-1)} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k} + x(m+N) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot N} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k} + \\
 &+ x(m) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot 0} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k} - x(m) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot 0} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k} = \\
 &= e^{j\frac{2\pi}{N}k} \cdot \left[x(m) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot 0} + x(m+1) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot 1} + \dots + x(m+N-1) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot (N-1)} \right] + \\
 &+ e^{j\frac{2\pi}{N}k} \cdot [x(m+N) - x(m)] = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \cdot [X_m(k) + x(m+N) - x(m)]
 \end{aligned}$$

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

Gördülő (rekurzív) DFT

$$X_{m+1}(k) = e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot k} \cdot [X_m(k) + x(m+N) - x(m)]$$

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények

A négyszögletes ablak -> időtartománybeli szorzás -> frekvenciatartománybeli konvolúció -> lengéseket -> csökkentése -> ablakfüggvények

Ismert:

- négyszögletes-ablak,
- Hamming-ablak,
- (Hahn) Hanning-ablak,
- Dolph–Csebisev-ablak,
- Kaiser-ablak

További:

- Bartlett-ablak,
- Blackmann–Harris-ablak.

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények

- Bartlett-ablak,

$$w_B(n) = \begin{cases} \frac{n}{N/2} & n = 0, 1, 2, \dots, N/2 \\ \frac{N-n}{N/2} & n = N/2, \dots, N-1 \end{cases}$$

- Blackmann–Harris-ablak.

$$w_{BH}(n) = \frac{3969}{9304} - 2 \cdot \frac{1155}{4652} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{N-1} \cdot n\right) + 2 \cdot \frac{715}{18608} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{N-1} \cdot 2 \cdot n\right) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények

Példa: Határozzuk meg az amplitúdóspektrumát annak az összetett jelnek, amely 1 amplitúdójú 37 Hz frekvenciájú, 0,1 amplitúdójú 95 Hz frekvenciájú és 0,0001 amplitúdójú 217 Hz frekvenciájú szinuszjel összege, és időtartama 350 ms 1000 Hz mintavételi frekvencia esetén!

Megoldás:

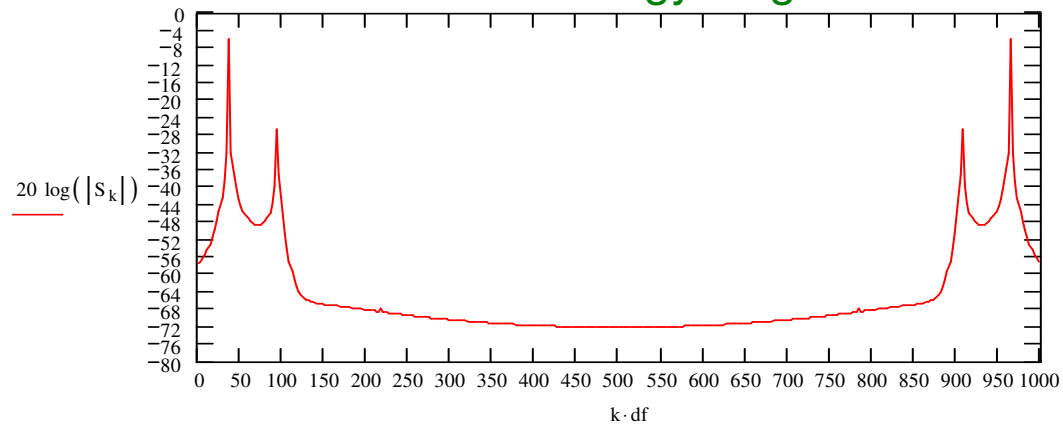
$$s(n) = a_1 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{f_1}{f_{MV}} \cdot n\right) + a_2 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{f_2}{f_{MV}} \cdot n\right) + a_3 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{f_3}{f_{MV}} \cdot n\right)$$

$$N = T \cdot f_{MV} = 350 \quad \Delta f = \frac{1}{T} \cong 2,86 \text{ Hz}$$

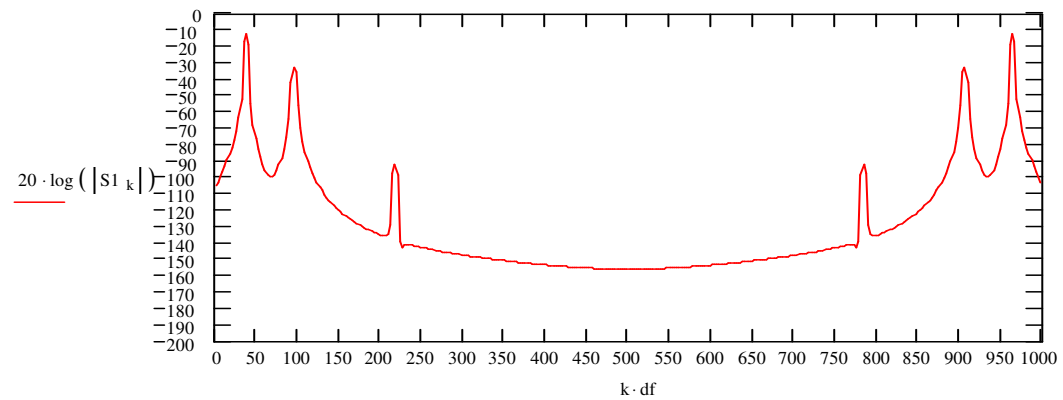
7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények

négyszögletes ablak



Hahn-ablak



7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

N mintából áll: $x(n)$; M mintából áll: $y(n)$; a sorozatok lineáris konvolúciója $N+M-1$ minta

```
//lineáris konvolúció
for(n=0;n<N+M-1;n++) z[n]=0.;
for(n=0;n<N+M-1;n++){
    zv=0.;
    for(k=0;k<N;k++){
        if( (n-k<0) || (n-k>M-1) ) yv=0;
        else yv=y[n-k];
        zv=zv+x[k]*yv;
    }
    z[n]=zv;
}
```

$$z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot y(n-k) \quad n = 0, 1, \dots, N+M-2$$

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

N mintából áll: $x(n)$; N mintából áll: $y(n)$; a sorozatok cirkuláris konvolúciója N minta

$$\tilde{z}(n) = \tilde{x}(n) \otimes \tilde{y}(n) \longrightarrow \tilde{z}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) \cdot \tilde{y}(n-k) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$



$$\tilde{X}(k) = \text{DFT}\{\tilde{x}(n)\} \quad \tilde{Y}(k) = \text{DFT}\{\tilde{y}(n)\}$$

$$\tilde{z}(n) = \text{IDFT}\{\tilde{X}(k) \cdot \tilde{Y}(k)\}$$

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

Példa: Legyen az $x(n)$ sorozat $(1,3,2)^T$, az $y(n)$ sorozat $(5,1,4)^T$! Határozzuk meg a cirkuláris konvolúcióval kapott sorozatot DFT-vel!

Megoldás

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -0.5 - 0.866i & -0.5 + 0.866i \\ 1 & -0.5 + 0.866i & -0.5 - 0.866i \end{pmatrix} \quad D1 = \begin{pmatrix} 0.333 & 0.333 & 0.333 \\ 0.333 & -0.167 + 0.289i & -0.167 - 0.289i \\ 0.333 & -0.167 - 0.289i & -0.167 + 0.289i \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 6 \\ -1.5 - 0.866i \\ -1.5 + 0.866i \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 2.5 + 2.598i \\ 2.5 - 2.598i \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad Z = \begin{pmatrix} 60 \\ -1.5 - 6.062i \\ -1.5 + 6.062i \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$z = \begin{pmatrix} 19 \\ 24 \\ 17 \end{pmatrix}$$

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

Példa: Határozzuk meg az $x = (1,2)^T$ és az $y = (3,1,4)^T$ sorozatok lineáris konvolúcióját a cirkuláris konvolúcióval a közvetlen számolás módszerével és DFT-vel!

Megoldás:

Mindkét módszer esetén szükséges a 0-kal való folytatólagos kiegészítés. A sorozat hossza a lineáris konvolúció esetén $L = N+M-1=4$, hiszen $x(n)$ $N=2$ mintából, $y(n)$ $M=3$ mintából áll. Tehát $x(n)$ -et $L-N=4-2=2$ darab 0-val, $y(n)$ -et $L-M=4-3=1$ darab nullával kell kiegészítenünk.

Legyen tehát $x_1(n)=(1,2,0,0)$ és $y_1(n)=(3,1,4,0)$.

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

A periodikussá tett sorozatokkal elvégezve a cirkuláris konvolúciót:

..1 2 0 0	1 2 0 0	1 2 0 0	1 2 0 0	1 2 0 0..	
..3 0 4 1	3 0 4 1	3 0 4 1	3 0 4 1	3 0 4 1..	3
..1 3 0 4	1 3 0 4	1 3 0 4	1 3 0 4	1 3 0 4	7
..4 1 3 0	4 1 3 0	4 1 3 0	4 1 3 0	4 1 3 0..	6
..0 4 1 3	0 4 1 3	0 4 1 3	0 4 1 3	0 4 1 3..	8
..3 0 4 1	3 0 4 1	3 0 4 1	3 0 4 1	3 0 4 1..	3
..1 3 0 4	1 3 0 4	1 3 0 4	1 3 0 4	1 3 0 4..	7

Az eredménysorozat ennek egy periódusa: (3,7,6,8)T, ez tehát az $x(n)$ és $y(n)$ sorozat lineáris konvolúciója (azonos azzal, amit a 3. fejezetben láttunk).

7. Digitális szűrők (FIR, IIR). Gördülő (rekurzív) DFT. Spektrumbecslés DFT-vel, ablakfüggvények. Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

Cirkuláris és lineáris konvolúció számítása DFT-vel.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \quad D1 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25i & -0.25 & -0.25i \\ 0.25 & -0.25 & 0.25 & -0.25 \\ 0.25 & -0.25i & -0.25 & 0.25i \end{pmatrix}$$

$$X1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 - 2i \\ -1 \\ 1 + 2i \end{pmatrix}$$

$$Y1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 - i \\ 6 \\ -1 + i \end{pmatrix}$$



$$Z = \begin{pmatrix} 24 \\ -3 + i \\ -6 \\ -3 - i \end{pmatrix}$$



$$z = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$L \geq N + M - 1 \quad L = 2^K$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

$$Z(\omega_X, \omega_Y) = \iint z(x, y) \cdot \exp(-j(\omega_X \cdot x + \omega_Y \cdot y)) dx dy$$

$$z(x, y) = \frac{1}{4 \cdot \pi^2} \iint Z(\omega_X, \omega_Y) \cdot \exp(j(\omega_X \cdot x + \omega_Y \cdot y)) d\omega_X d\omega_Y$$

$$f_X = \frac{\omega_X}{2\pi} \quad f_Y = \frac{\omega_Y}{2\pi} \quad \text{x- ill- y-irányú síkfrekvenciák} \quad \lambda_X = \frac{1}{f_X} \quad \lambda_Y = \frac{1}{f_Y}$$

$$\exp(-j(\omega_X \cdot x + \omega_Y \cdot y)) = \cos(\omega_X \cdot x + \omega_Y \cdot y) - j \cdot \sin(\omega_X \cdot x + \omega_Y \cdot y) \quad \text{síkhullámok}$$

$$\varphi_{XY} = \arctg\left(\frac{f_X}{f_Y}\right) \quad \text{a síkhullám iránya}$$

$$f_{XY} = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2} \quad \text{a síkhullám frekvenciája}$$

a 2D jel sávhatárolt, ha

$$Z(\omega_X, \omega_Y) = 0 \quad |\omega_X| \geq \omega_X^H, \quad |\omega_Y| \geq \omega_Y^H$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

Kétdimenziós jelek mintavételezése, kvantálása és kódolása

$$z(x, y) \longrightarrow z(n \cdot \Delta x, m \cdot \Delta y)$$

$$\begin{array}{ccc} & \Delta x & \Delta y \\ & \swarrow & \searrow \\ f_X^{MV} = \frac{1}{\Delta x} & & f_Y^{MV} = \frac{1}{\Delta y} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot f_X^H \leq f_X^{MV} \\ 2 \cdot f_Y^H \leq f_Y^{MV} \end{array} \right\}$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

Ha a rendszer súlyfüggvénye $h(x, y)$, a konvolúció a képtartományban:

$$u(x, y) = \iint z(\xi, \eta) \cdot h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$$

$$U(\omega_X, \omega_Y) = Z(\omega_X, \omega_Y) \cdot H(\omega_X, \omega_Y)$$



$$u(m, n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z(i, j) \cdot h(m - i, n - j) \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$z(m, n) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} x(i, j) \cdot y(m-i, n-j) \quad m = 0, 1, \dots, M+K-2 \quad n = 0, 1, \dots, N+L-2$$

```

conv2d(X, Y) :=
  M ← rows(X)
  N ← cols(X)
  K ← rows(Y)
  L ← cols(Y)
  for m ∈ 0..M+K-2
    for n ∈ 0..N+L-2
      zv ← 0
      for i ∈ 0..M-1
        for j ∈ 0..N-1
          yv ← 0 if (m-i < 0) ∨ (m-i > K-1) ∨ (n-j < 0) ∨ (n-j > L-1)
          yv ← Ym-i, n-j otherwise
          zv ← zv + Xi, j · yv
      Zm, n ← zv
  Z
  
```

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$



$$Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

1. tükrözés

1	2
3	-1
4	-6

-6	4
-1	3
2	1

4	-6
3	-1
1	2

KF GAMFK AAI

2. eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

$$Z_{0,0} = (-6) \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

-6	4					
-1	3					
2	1	1	-1	2	1	-3
	3	1	4	5	6	
	-7	6	-9	12	11	

#171

133

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$



$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

-6		4							
							-1		3
1	2	-1	1						
3	1	4	5				6		
-7	6	-9	12	11					

$$Z_{0,1} = (-6) \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$



$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

		-6	4		
		-1	3		
1	-1	2	1	1	-3
3	1	4	5	6	
-7	6	-9	12	11	

$$Z_{0,2} = (-6) \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (2) = 0$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$



$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

		-6	4			
		-1	3			
1	-1	2	2	1	1	-3
3	1	4	5	6		
-7	6	-9	12	11		

$$Z_{0,3} = (-6) \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$



$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

			-6	4		
			-1	3		
1	-1	2	1	2	-3	1
3	1	4	5	6		
-7	6	-9	12	11		

$$Z_{0,4} = (-6) \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = -1$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$



$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

				-6	4
				-1	3
1	-1	2	1	-3	2
3	1	4	5	6	
-7	6	-9	12	11	

$$Z_{0,5} = (-6) \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 = -6$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$\begin{matrix}
 X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} & Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} & \longrightarrow & Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

-6	4					
-1	1	3	-1	2	1	-3
2	3	1	1	4	5	6
	-7	6	-9	12	11	

$$Z_{1,0} = (-6) \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 6$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

-6		4				
1	-1	-1	3	2	1	-3
3	2	1	1	4	5	6
-7	6	-9	12	11		

$$Z_{1,1} = (-6) \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 3$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

		-6	4		
1	-1	-1	2	3	1
3	1	2	4	1	5
-7	6	-9	12	11	

$$Z_{1,2} = (-6) \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 13$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$\begin{matrix}
 X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} & Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} & \longrightarrow & Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

		-6	4		
1	-1	2	-1	1	3
3	1	4	2	5	1
-7	6	-9	12	11	

$$Z_{1,3} = (-6) \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 14$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

			-6	4		
1	-1	2	1	-1	-3	3
3	1	4	5	2	6	1
-7	6	-9	12	11		

$$Z_{1,4} = (-6) \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 6 = 6$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

				-6	4	
1	-1	2	1	-3	-1	3
3	1	4	5	6	2	1
-7	6	-9	12	11		

$$Z_{1,5} = (-6) \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot (-3) + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 0 = 15$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

-6	1	4	-1	2	1	-3
-1	3	3	1	4	5	6
2	-7	1	6	-9	12	11

$$Z_{2,0} = (-6) \cdot 0 + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-7) = 6$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

1	-6	-1	4	2	1	-3
3	-1	1	3	4	5	6
-7	2	6	1	-9	12	11

$$Z_{2,1} = (-6) \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-7) + 1 \cdot 6 = -18$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

1	-1 -6	2 4	1	-3
3	1 -1	4 3	5	6
-7	6 2	-9 1	12	11

$$Z_{2,2} = (-6) \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot (-9) = 28$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

1	-1	2	-6	1	4	-3
3	1	4	-1	5	3	6
-7	6	-9	2	12	1	11

$$Z_{2,3} = (-6) \cdot 2 + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-9) + 1 \cdot 12 = -3$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

1	-1	2	1	-6	-3	4
3	1	4	5	-1	6	3
-7	6	-9	12	2	11	1

$$Z_{2,4} = (-6) \cdot 1 + 4 \cdot (-3) + (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 12 + 1 \cdot 11 = 30$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

1	-1	2	1	-3 -6	4
3	1	4	5	6 -1	3
-7	6	-9	12	11 2	1

$$Z_{2,5} = (-6) \cdot (-3) + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 6 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 0 = 34$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$



$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

		1	-1	2	1	-3
-6	3	4	1	4	5	6
-1	-7	3	6	-9	12	11
2		1				

$$Z_{3,0} = (-6) \cdot 0 + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-7) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -9$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$



$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

1	-1	2	1	-3		
3	-6	1	4	4	5	6
-7	-1	6	3	-9	12	11
	2	1				

$$Z_{3,1} = (-6) \cdot 3 + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-7) + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 11$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

1	-1	2	1	-3	
3	1 -6	4 4	5	6	
-7	6 -1	-9 3	12	11	
	2	1			

$$Z_{3,2} = (-6) \cdot 1 + 4 \cdot 4 + (-1) \cdot 6 + 3 \cdot (-9) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -23$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

1	-1	2	1	-3		
3	1	4	-6	5	4	6
-7	6	-9	-1	12	3	11
		2	1			

$$Z_{3,3} = (-6) \cdot 4 + 4 \cdot 5 + (-1) \cdot (-9) + 3 \cdot 12 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 41$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

1	-1	2	1	-3		
3	1	4	5	-6	6	4
-7	6	-9	12	-1	11	3
			2	1		

$$Z_{3,4} = (-6) \cdot 5 + 4 \cdot 6 + (-1) \cdot 12 + 3 \cdot 11 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 15$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

1	-1	2	1	-3		
3	1	4	5	6	-6	4
-7	6	-9	12	11	-1	3
				2		1

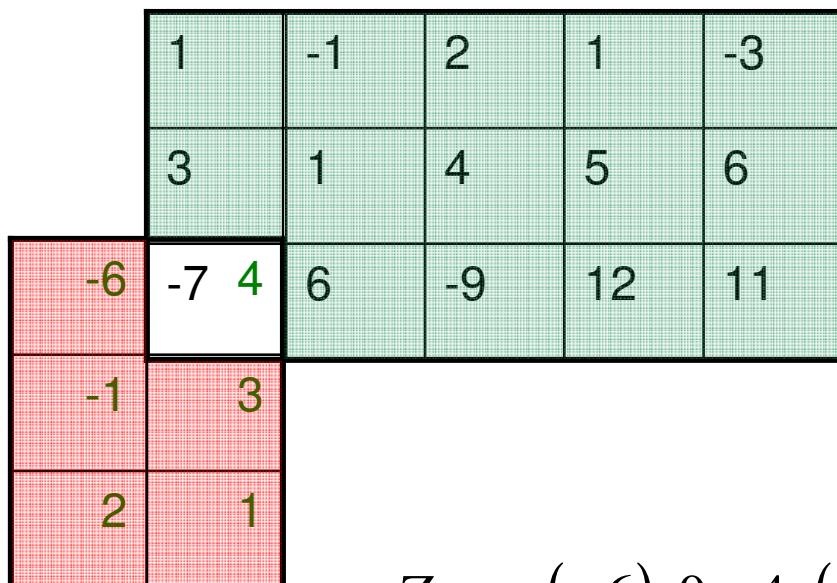
$$Z_{3,5} = (-6) \cdot 6 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 11 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -47$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás



$$Z_{4,0} = (-6) \cdot 0 + 4 \cdot (-7) + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -28$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

1	-1	2	1	-3
3	1	4	5	6
-7	-6	6	4	-9
-1	3			
2	1			

$$Z_{4,1} = (-6) \cdot (-7) + 4 \cdot 6 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 66$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

1	-1	2	1	-3		
3	1	4	5	6		
-7	6	-6	-9	4	12	11
		-1	3			
		2	1			

$$Z_{4,2} = (-6) \cdot 6 + 4 \cdot (-9) + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -72$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

1	-1	2	1	-3					
3	1	4	5	6					
-7	6	-9	-6	12	4	11			
			-1	3					
			2	1					

$$Z_{4,3} = (-6) \cdot (-9) + 4 \cdot 12 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 102$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

1	-1	2	1	-3
3	1	4	5	6
-7	6	-9	12-6	11 4
			-1	3
			2	1

$$Z_{4,4} = (-6) \cdot 12 + 4 \cdot 11 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -28$$

8. Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós lineáris konvolúció.

A konvolúció számítása a képtartományban:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

eltolás a megfelelő pozícióba és számítás

1	-1	2	1	-3		
3	1	4	5	6		
-7	6	-9	12	11-6	4	
				-1	3	
				2	1	

$$Z_{4,5} = (-6) \cdot 11 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -66$$

9. 2D DFT és számítása egydimenziós DFT-vel.
Kétdimenziós jelek digitalizálása. Kétdimenziós
lineáris konvolúció.

10. 2D DCT és számítása egydimenziós DCT-vel.
Alkalmazások.

2D DFT és 2D IDFT

$$Z(k,l) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} z(m,n) \cdot \exp\left(-j \cdot 2 \cdot \pi \left(\frac{k \cdot m}{M} + \frac{l \cdot n}{N}\right)\right) \quad k = 0,1,\dots,M-1 \quad l = 0,1,\dots,N-1$$

$$z(m,n) = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} Z(k,l) \cdot \exp\left(j \cdot 2 \cdot \pi \left(\frac{k \cdot m}{M} + \frac{l \cdot n}{N}\right)\right) \quad n = 0,1,\dots,N-1 \quad m = 0,1,\dots,M-1$$

```

dft2d(X) :=
  M ← rows(X)
  N ← cols(X)
  for n ∈ 0..N-1
    Y<n> ← CFFT(X<n>)
  Y ← YT
  for m ∈ 0..M-1
    Y<m> ← CFFT(Y<m>)
  Y ← YT
  Y
    
```

először rendre minden oszlopvektor 1D DFT-jét számítjuk ki, majd rendre a kapott mátrix sorvektorainak DFT-jét véve adódik a mátrix 2D DFT-je

VAGY

először rendre minden sorvektor 1D DFT-jét számítjuk ki, majd rendre a kapott mátrix oszlopvektorainak DFT-jét véve adódik a mátrix 2D DFT-je

2D DFT és 2D IDFT

Példa: Határozzuk meg az $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ mátrix 2D DFT-jét!

Megoldás:

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{N} := 2 \quad \mathbf{M} := 3 \quad n := 0..N-1 \quad m := 0..M-1$$

$$Y^{\langle n \rangle} := \text{CFFT}(X^{\langle n \rangle}) \quad Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 + 0.577i & -1 + 0.577i \\ -1 - 0.577i & -1 - 0.577i \end{pmatrix}$$

$$Y1 := Y^T \quad Y1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 + 0.577i & -1 - 0.577i \\ 4 & -1 + 0.577i & -1 - 0.577i \end{pmatrix}$$

$$Y2^{\langle m \rangle} := \text{CFFT}(Y1^{\langle m \rangle}) \quad Y3 := Y2^T$$

$$Y3 = \begin{pmatrix} 3.5 & -0.5 \\ -1 + 0.577i & 0 \\ -1 - 0.577i & 0 \end{pmatrix}$$

2D DCT számítása

$$Z_C(k,l) = \frac{4 \cdot C(k) \cdot C(l)}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} z(m,n) \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot (2 \cdot m + 1)}{2 \cdot N}\right) \cdot \cos\left(\frac{l \cdot \pi \cdot (2 \cdot n + 1)}{2 \cdot N}\right)$$

$$k, l = 0, 1, \dots, N-1 \quad C(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad C(i) = 1 \text{ ha } i = 1, 2, \dots, N-1$$

Példa. Számítsuk ki az X és Y mátrixok lineáris konvolúcióját 2D DFT-vel!

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

Példa. Számítsuk ki az X és Y mátrixok lineáris konvolúcióját 2D DFT-vel!

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

1. Az X és Y mátrixok kiegészítése 0-kkal

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. 2D DCT és számítása egydimenziós DCT-vel. Alkalmazások.

Példa. Számítsuk ki az X és Y mátrixok lineáris konvolúcióját 2D DFT-vel!

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

2. 2 D DFT számítása (FFT-vel)

$$FX = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.183 + 0.144i & 0.35 + 0.144i & 0.433 & 0.35 - 0.144i & 0.183 - 0.144i \\ 0.175 - 0.024i & 0.195 - 0.288i & -0.023 - 0.437i & -0.262 - 0.323i & -0.282 - 0.059i & -0.064 + 0.09i \\ 0.025 - 0.103i & -0.138 - 0.045i & -0.17 + 0.126i & -0.038 + 0.239i & 0.125 + 0.181i & 0.157 + 0.01i \\ 0.025 + 0.103i & 0.157 - 0.01i & 0.125 - 0.181i & -0.038 - 0.239i & -0.17 - 0.126i & -0.138 + 0.045i \\ 0.175 + 0.024i & -0.064 - 0.09i & -0.282 + 0.059i & -0.262 + 0.323i & -0.023 + 0.437i & 0.195 + 0.288i \end{pmatrix}$$

$$FY = \begin{pmatrix} 1.067 & -0.783 + 0.318i & 0.217 - 0.664i & -0.533 & 0.217 + 0.664i & -0.783 - 0.318i \\ -0.155 - 0.857i & 0.656 + 0.106i & -0.425 + 0.655i & 0.692 + 0.229i & 0.622 - 0.853i & 0.126 + 0.973i \\ -0.378 + 0.04i & -0.367 - 0.426i & 0.706 - 5.947 \times 10^{-3} & -0.426 - 0.866i & -0.62 - 0.029i & 0.368 - 0.398i \\ -0.378 - 0.04i & 0.368 + 0.398i & -0.62 + 0.029i & -0.426 + 0.866i & 0.706 + 5.947 \times 10^{-3} & -0.367 + 0.426i \\ -0.155 + 0.857i & 0.126 - 0.973i & 0.622 + 0.853i & 0.692 - 0.229i & -0.425 - 0.655i & 0.656 - 0.106i \end{pmatrix}$$

10. 2D DCT és számítása egydimenziós DCT-vel. Alkalmazások.

Példa. Számítsuk ki az X és Y mátrixok lineáris konvolúcióját 2D DFT-vel!

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

3. A két transzformált mátrix azonos indexű komponenseinek szorzata

$$FZ = \begin{pmatrix} 0.107 & -0.189 - 0.055i & 0.172 - 0.201i & -0.231 & 0.172 + 0.201i & -0.189 + 0.055i \\ -0.048 - 0.146i & 0.158 - 0.168i & 0.296 + 0.17i & -0.107 - 0.283i & -0.226 + 0.204i & -0.096 - 0.051i \\ -5.548 \times 10^{-3} + 0.04i & 0.032 + 0.075i & -0.119 + 0.09i & 0.223 - 0.068i & -0.073 - 0.116i & 0.062 - 0.059i \\ -5.548 \times 10^{-3} - 0.04i & 0.062 + 0.059i & -0.073 + 0.116i & 0.223 + 0.068i & -0.119 - 0.09i & 0.032 - 0.075i \\ -0.048 + 0.146i & -0.096 + 0.051i & -0.226 - 0.204i & -0.107 + 0.283i & 0.296 - 0.17i & 0.158 + 0.168i \end{pmatrix}$$

10. 2D DCT és számítása egydimenziós DCT-vel. Alkalmazások.

Példa. Számítsuk ki az X és Y mátrixok lineáris konvolúcióját 2D DFT-vel!

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & -9 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

4. A szorzás után kapott mátrix inverz 2D DFT-jének MxN-szorosa (az eredmény azonos a képtartománybeli lineáris konvolúcióval kapott eredménnyel)

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -6 \\ 6 & 3 & 13 & 14 & 6 & 15 \\ 6 & -18 & 28 & -3 & 30 & 34 \\ -9 & 11 & -23 & 41 & 15 & -47 \\ -28 & 66 & -72 & 102 & -28 & -66 \end{pmatrix}$$

Szürkeárnyaltos képek szűrése



Aluláteresztő szűrő

$$H = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Felüláteresztő szűrő

$$H = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$



Gradiens-szűrő

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

