Egyetemi jegyzet

Automaták és formális nyelvek

Fülöp Zoltán

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Számítástudományi Tanszék

2003. ősz

Előszó

Ez jegyzet az SZTE Informatikai Tanszékcsoportnál tartott Automaták és formális nyelvek c. kurzusom anyagát tartalmazza. Megértéséhez szükség van diszkrét matematikai ismeretekre valamint a Formális nyelvek és szintaktikus elemzésük c. tárgy bevezető fejezeteinek ismeretére, melyek – többek között – a hasonló című tankönyvem első öt fejezetében találhatók meg.

Fel szeretném hívni az olvasó figyelmét, hogy a jegyzet még nem teljes, fejlesztés alatt lévő változat, ezért elképzelhető, hogy kisebb hibákat, hiányosságokat tartalmaz.

Ezúton fejezem ki köszönetemet Jász Juditnak és Sógor Zoltánnak, akik a 2002-es őszi félév során segítettek nekem a nulladik változatának elkészítésében.

Szeged, 2003. december 3.

Fülöp Zoltán

Tartalomjegyzék

1. Reguláris nyelvek

1.1. Fogalmak, jelölések

Először bevezetünk néhány jelölést

Ekvivalenciarelációkkal kapcsolatos alapfogalmak

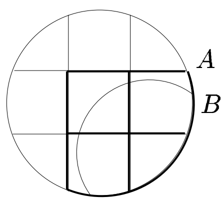
Legyen A egy halmaz és ρ egy ekvivalenciareláció A felett. Ekkor minden $a, b \in A$ esetén röviden csak $a\rho b$-vel jelöljük azt a tényt, ha a és b ρ relációban vannak, vagyis $(a, b) \in \rho$. Továbbá, a/ρ-val jelöljük az a-t tartalmazó ekvivalencia osztályt, vagyis

$$a/\rho = \{b \in A \,|\, a\rho b\}.$$

Az a/ρ halmazt ρ-osztálynak hívjuk. Továbbá, minden $B \subseteq A$ esetén bevezetjük a

$$B/\rho = \{a/\rho \,|\, a \in B\}.$$

Például, a következő ábrán B/ρ a vastagabb vonallal jelzett négy osztályból álló halmaz.

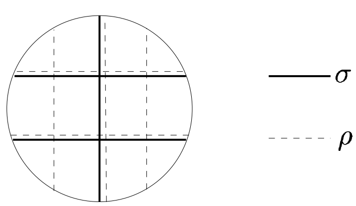


Így A/ρ az összes ρ-osztályok halmaza. Ha A/ρ véges, akkor azt mondjuk, hogy ρ *véges indexű*.

Legyen ismét $B \subseteq A$. Azt mondjuk, hogy ρ *szaturálja* B*-t*, ha $B = \bigcup_{b \in B} b/\rho$, vagyis B a ρ azon osztályainak egyesítése, melyeknek B-vel való, metszete nem üres. Megjegyezzük, hogy a fenti ábrán szereplő B-t nem szaturálja ρ.

1.1. Megjegyzés. Legyen A egy halmaz, továbbá ρ és σ ekvivalenciarelációk A felett, úgy, hogy $\rho \subseteq \sigma$. Ha ρ véges indexű, akkor σ is véges indexű.

Bizonyítás. Mivel $\rho \subseteq \sigma$, minden σ-osztály ρ-osztályok egyesítéseként áll elő, lásd az alábbi ábrát. Így $||A/\sigma|| \leq ||A/\rho||$.

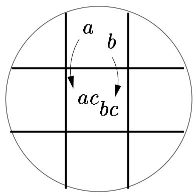


Monoidok

Félcsoportnak nevezünk egy $(M, \cdot)$ rendezett párt, ahol M egy halmaz, $\cdot : M \times M \to M$ pedig egy M feletti kétváltozós asszociatív művelet. Ez utóbbi azt jeneti, hogy minden $a, b, c \in M$ estén $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. A továbbiakban, ha nem okoz félreértést, akkor $a \cdot b$ helyett csak ab-t írunk. Egy M félcsoport *monoid*, ha van egységeleme, vagyis van olyan $e \in M$, hogy minden $a \in M$-re $ea = ae = a$.

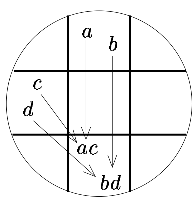
Legyenek M és N monoidok. Egy $h : M \to N$ leképezést *homomorfizmusnak* nevezünk, ha minden $a, b \in M$-ra fennáll, hogy $f(ab) = f(a)f(b)$. Megjegyezzük, hogy az egyenlet jobb oldalán N-beli szorzás áll.

Legyen M egy monoid, $\rho \subseteq M \times M$ pedig ekvivalenciareláció M felett. ρ *jobbkongruencia*, ha minden $a, b, c \in M$-re $a \, \rho \, b \Rightarrow ac \, \rho \, bc$.

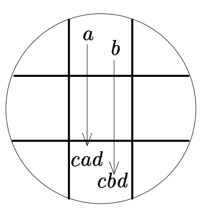


Legyen ismét M egy monoid, $\rho \subseteq M \times M$ pedig ekvivalenciareláció M felett.

a) ρ *kongruencia*, ha $\forall a, b, c, d \in M$-re, ha $a \, \rho \, b$ és $c \, \rho \, d \Rightarrow ac \, \rho \, bd$



b) ρ *kongruencia*, ha $\forall a, b, c, d \in M$-re, ha $a \, \rho \, b \Rightarrow cad \, \rho \, cbd$



Könnyű belátni, hogy a kongruencia két definíciója ekvivalens.

Ha M monoid, ρ pedig kongruencia M-en, akkor M/ρ, az $a/\rho \, b/\rho = ab/\rho$ művelettel ellátva ugyancsak monoidot alkot, melyet *ρ által M-en meghatározott faktormonoidnak nevezünk*. Továbbá, a $h(a) = a/\rho$ $(a \in M)$ által definiált leképezés homomorfizmus lesz M-ből M/ρ-ba, mert $h(ab) = h(ab/\rho) = h(a/\rho)h(b/\rho) = h(a)h(b)$.

Az is könnyen belátható, hogy minden Σ ábécé esetén Σ^* monoidot alkot a konkatenáció, vagyis a szavak egymás után írása műveletre nézve. A konkatenáció egységeleme az ε-nal jelölt üres szó, hiszen minden $x \in \Sigma^*$ esetén $x\varepsilon = \varepsilon x = x$. A továbbiakban igen sokat foglalkozunk majd a Σ^* monoiddal.

Automaták átmenetfüggvényének kiterjesztése

Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy (determinisztikus és teljes) automata. A δ átmenetfüggvényt kiterjesztjük $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ függvénnyé a következő módon:

(i) Minden $q \in Q$ állapotra legyen $\delta^*(q, \lambda) = q$,

(ii) Minden $q \in Q$ állapot és $x = ya \in \Sigma^*$ szó esetén (ahol $y \in \Sigma^*$ és $a \in \Sigma$) legyen $\delta^*(q, x) = \delta(\delta^*(q, y), a)$.

Könnyen igazolható, hogy minden $x, y \in \Sigma^*$ és $q \in Q$ esetén teljesül a $\delta^*(q, xy) = \delta^*(\delta^*(q, x), y)$ egyenlőség.

1.2. Nerode és Myhill tételei

1.2. Definíció. Legyen Σ egy ábécé, $L \subseteq \Sigma^*$ pedig egy nyelv. Definiáljuk ρ_L relációt Σ^* felett a következőképpen: minden $x, y \in \Sigma$-ra

$$x \rho_L y \text{ akkor és csak akkor, ha } \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \iff yz \in L$$

□

1.3. Lemma. ρ_L jobbkongruencia Σ^* felett.

Bizonyítás. A ρ_L ekvivalenciareláció, mert reflexív, szimmetrikus, tranzitív. Ezen tulajdonságok könnyen ellenőrizhetők.

Most megmutatjuk, hogy ρ_L jobbkongruencia is. Vegyük evégett az $x, y \in \Sigma^*$ szavakat úgy, hogy $x \,\rho_L\, y$, és vegyünk egy tetszőleges $z \in \Sigma^*$-ot. Megmutatjuk, hogy ekkor $xz \,\rho_L\, yz$. Vegyünk ennek érdekében egy további $u \in \Sigma^*$ szót. Az $x \,\rho_L\, y$-ból következik, hogy $x(zu) \in L \iff y(zu) \in L$. A szavak konkatenálásának asszociativitása miatt ez ekvivalens az $(xz)u \in L \iff (yz)u \in L$ összefüggéssel. Tehát $x \,\rho_L\, y$-ből következik, hogy $xz \,\rho_L\, yz$, így ρ_L jobbkongruencia. □

A ρ_L-et az L *által meghatározott szintaktikus jobbkongruenciának* nevezzük.

1.4. Lemma. Minden $L \subseteq \Sigma^*$-ra ρ_L szaturálja L-et.

Bizonyítás. Vegyünk $x, y \in \Sigma^*$ szavakat, melyek ugyanazon ρ_L osztályban vannak, vagyis melyekre teljesül $x \,\rho_L\, y$. Ekkor minden $z \in \Sigma^*$-ra $xz \in L \iff yz \in L$. Használva ezen feltételt a $z = \varepsilon$ szóra kapjuk, hogy $x \in L \iff y \in L$. Vagyis ρ_L minden osztályára igaz, hogy vagy részhalmaza az L-nek, vagy az L-lel való metszete üres. Tehát $L = \bigcup_{x \in L} x/\rho_L$. □

Most bebizonyítjuk Nerode tételét.

1.5. Tétel. (Nerode tétele.) *Minden $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv esetén a következő három állítás ekvivalens:*

(1) L felismerhető automatával.

(2) Van olyan véges indexű jobbkongruencia Σ^* felett, amely szaturálja L-et.

(3) A ρ_L jobbkongruencia véges indexű.

Bizonyítás. Először is megjegyezzük, hogy a (3) $\Rightarrow$ (2) lépés következik az 1.4. Lemmából. Mi azonban egy másik utat követünk a bizonyítással.

1. lépés: (1) $\Rightarrow$ (2). Tételezzük fel, hogy $L = L(M)$, ahol $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata. Definiáljuk ρ relációt Σ^* felett a következőképpen: minden $x, y \in \Sigma^*$-ra legyen $x\rho y$ akkor és csak akkor, ha $\delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, y)$.

Megmutatjuk, hogy ρ véges indexű jobbkongruencia. Az, hogy ρ ekvivalenciareláció, nyilvánvaló. Mutassuk meg, hogy jobbkongruencia is. Vegyük evégett az $x, y \in \Sigma^*$ szavakat, melyekre $x\rho y$, azaz $\delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, y)$ és legyen $z \in \Sigma^*$. Akkor

$$\delta^*(q_0, xz) = \delta^*(\delta^*(q_0, x), z) = \delta^*(\delta^*(q_0, y), z) = \delta^*(q_0, yz),$$

ami azt igazolja, hogy $xz\rho yz$. Tehát ρ jobbkongruencia.

Most megmutatjuk, hogy ρ véges indexű. Definiáljuk Σ^*/ρ-nak Q-ba való leképezését úgy, hogy az x/ρ elemhez rendeljük hozzá a $\delta^*(q_0, x)$ állapotot. Az így definiált leképezés injektív, mert ha $\delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, y)$, akkor definíciós szerint $x\rho y$, vagyis $x/\rho = y/\rho$. Ha viszont a leképezés injektív, akkor $||\Sigma^*/\rho|| \leq ||Q||$, ami azt jelenti, hogy ρ véges indexű.

Végül, mivel $L = \bigcup(x/\rho \,|\, \delta^*(q_0, x) \in F)$, azt kapjuk, hogy ρ szaturálja L-et.

2. lépés: (2) $\Rightarrow$ (3). Tegyük fel, hogy a Σ^* feletti ρ véges indexű jobbkongruencia szaturálja L-et. A 1.1. Megjegyzés értelmében elegendő megmutatni, hogy $\rho \subseteq \rho_L$.

Legyenek evégett $x, y \in \Sigma^*$ olyanok, hogy $x\rho y$ és legyen $z \in \Sigma^*$. Akkor $xz\rho yz$, mivel ρ jobbkongruencia. Továbbá, mivel ρ szaturálja L-et az $xz \in L$ tartalmazás akkor és csak akkor teljesül, ha $yz \in L$, vagyis $x\rho_L y$. Következésképpen $\rho \subseteq \rho_L$.

3. lépés: (3) $\Rightarrow$ (1). Tegyük fel, hogy ρ_L véges indexű. Megmutatjuk, hogy ekkor L felismerhető.

Ezt úgy érjük el, hogy definiálunk egy olyan M_L automatát, melyre $L = L(M_L)$. Legyen $M_L = (\Sigma^*/\rho_L, \Sigma, \delta_L, \lambda/\rho_L, L/\rho_L)$. Az automata nyilvánvalóan véges, mivel ρ_L véges indexű és így Σ^*/ρ_L is véges halmaz.

A δ_L átmenetfüggvényt a következőképpen definiáljuk: minden $x \in \Sigma^*$ és $a \in \Sigma$ esetén legyen $\delta_L(x/\rho_L, a) = xa/\rho_L$. Ekkor δ_L jóldefiniált, mivel, ha $x/\rho_L = y/\rho_L$, akkor

$$\begin{aligned}
\delta_L(x/\rho_L, a) &= xa/\rho_L && \text{(definíció szerint)}\\
&= ya/\rho_L && \text{(mivel } \rho_L \text{ jobbkongruencia)}\\
&= \delta_L(y/\rho_L, a) && \text{(definíció szerint).}
\end{aligned}$$

Az y szó hossza szerinti indukcióval bizonyítható, hogy minden $x, y \in \Sigma^*$ esetén $\delta_L^*(x/\rho_L, y) = xy/\rho_L$ teljesül. Jelöljük ezt az állítást †-rel.

Így az $L = L(M_L)$ egynlőség a következőképpen igazolható: minden $x \in \Sigma^*$-ra

$$\begin{array}{llll} x \in L(M_L) & \iff & \delta_L^*(\lambda/\rho_L, x) \in L/\rho_L & \text{(definíció szerint)} \\ & \iff & x/\rho_L \in L/\rho_L & \text{(az előbbi † megjegyzés miatt)} \\ & \iff & x \in L & \text{(mivel } \rho_L \text{ szaturálja } L\text{-t, lásd 1.4. Lemma).} \end{array}$$

□

Tulajdonképpen azt is megmutattuk, hogy ρ_L a legbővebb kongruencia, amely szaturálja L-et. Ezt a következő formában mondjuk ki.

1.6. Következmény. Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ egy nyelv és legyen ρ egy olyan jobbkongruencia, amely szaturálja L-et. Ekkor $\rho \subseteq \rho_L$.

Bizonyítás. Közvetlenül adódik az 1.5. Tétel második lépésének bizonyításából. □

Most rátérünk Myhill tételének bizonyítására.

1.7. Definíció. Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ egy tetszőleges nyelv. Definiáljuk a Σ^* feletti θ_L relációt a következőképpen: minden $x, y \in \Sigma^*$ esetén $x\theta_L y$ akkor és csak akkor teljesüljön, ha minden $u, v \in \Sigma^*$ szóra $uxv \in L \iff uyv \in L$. □

Rutin számolással igazolható, hogy θ_L kongruencia Σ^* felett, a bizonyítás ugyanúgy megy, mint annak igazolása, hogy ρ_L jobbkongruencia, lásd 1.3. Lemma. Ugyancsak igazolható, hogy θ_L szaturálja L-et.

1.8. Lemma. Minden $L \subseteq \Sigma^*$ esetén θ_L szatrurálja L-et.

Bizonyítás. Legyen $x, y \in \Sigma^*$, melyekre $x\theta_L y$. Akkor minden $u, v \in \Sigma^*$-ra $uxv \in L$ akkor és csak akkor, ha $uyv \in L$. Alkalmazva ezt $u = v = \varepsilon$-ra, kapjuk, hogy $x \in L$ akkor és csak akkor, ha $y \in L$. Így θ minden osztálya vagy részhalmaza L-nek vagy az álá-lel való metszete üres. Ezért $L = \bigcup_{x \in L} x/\theta_L$, tehát θ_L szaturálja l-et. □

Most már be tudjuk bizonyítani a Myhill tételt.

1.9. Tétel. (Myhill tétele.) *Minden $L \subseteq \Sigma^*$ estén a következő három állítás ekvivalens:*

(1) L felismerhető automatával.

(2) van olyan véges indexű kongruencia Σ^* felett, amely szaturálja L-et.

(3) A θ_L kongruencia véges indexű.

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy a (3) $\Rightarrow$ (2) lépés most is következik a 1.8. Lemmából.

1. lépés: (1) $\Rightarrow$ (2). Tegyük fel, hogy L felismerhető, vagyis $L = L(M)$ valamely $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automaára. Definiáljuk a θ relációt Σ^* felett a következőképpen: minden $x, y \in \Sigma^*$ esetén $x\theta y$ akkor és csak akkor teljesüljön, ha minden $q \in Q$ állapotra $\delta^*(q, x) = \delta^*(q, y)$.

Először megmutatjuk, hogy θ véges indexű kongruencia Σ^* felett.

Az, hogy θ ekvivalenciareláció, nyilvánvaló. Megmutatjuk, hogy kongruencia is. Legyen evégett $x, y \in \Sigma^*$ két olyan szó, melyre $x\theta y$, vagyis minden $q \in Q$ állapot estén $\delta^*(q, x) = \delta^*(q, y)$. Legyen $u, v \in \Sigma^*$ és $q \in Q$. Akkor

$$\delta^*(q, uxv) = \delta^*(\delta^*(\delta^*(q, u), x), v) = \delta^*(\delta^*(\delta^*(q, u), y), v) = \delta^*(q, uyv),$$

ami azt jelenti, hogy $uxv\theta uyv$, következésképpen θ kongruencia.

Az, hogy θ véges indexű, a következőképpen látható be. Minden $x \in \Sigma^*$-ra definiáljuk a $\varphi_x : Q \to Q$ leképezést úgy, hogy minden $q \in Q$-ra legyen $\varphi_x(q) = \delta^*(q, x)$. Akkor $x\theta y$-ból következik, hogy $\varphi_x = \varphi_y$ és így a θ-osztályok száma legfeljebb annyi mint a Q-ból Q-ba való leképezések száma, ami nyilvánvalóan véges szám (pontosan $||Q||^{||Q||}$). Így azt kaptuk, hogy θ véges indexű.

Végül, mivel $L = \bigcup(x/\theta \mid \delta^*(q_0, x) \in F)$, azt is beláttuk, hogy θ szaturálja L-et.

2. lépés: (2) $\Rightarrow$ (3). Tegyük fel, hogy θ egy véges indexű kongruencia, amely szaturálja L-et. A 1.1. Megjegyzés miatt elegendő igazolni, hogy $\theta \subseteq \theta_L$.

Vegyük evégett az $x, y \in \Sigma^*$ szavakat, melyekre $x\theta y$ és legyen $u, v \in \Sigma^*$ további két tetszőleges szó. Ekkor $uxv\theta uyv$, mivel θ kongruencia. Továbbá, mivel θ szaturálja L-et, az is igaz, hogy $uxv \in L$ akkor és csak akkor teljesül, ha $uyv \in L$. Tehát $x\theta_L y$, ami bizonyítja, hogy $\theta \subseteq \theta_L$.

3. lépés: (3) $\Rightarrow$ (1). Tegyük fel, hogy θ_L véges indexű.

Megmutatjuk, hogy L felismerhető, azaz megadunk egy M_L automatát, melyre $L = L(M_L)$. Legyen $M_L = (\Sigma^*/\theta_L, \Sigma, \delta_L, \lambda/\theta_L, L/\theta_L)$. Ekkor Σ^*/θ_L véges, mivel θ_L véges indexű.

A δ_L átmenetfüggvényt úgy definiáljuk, hogy minden $x \in \Sigma^*$ és $a \in \Sigma$ esetén $\delta_L(x/\theta_L, a) = xa/\theta_L$. Ekkor δ_L jóldefiniált, mivel θ_L kongruencia és így jobbkongruencia is, lásd a 1.5. Tétel bizonyítását .

Az y szó hossza szerinti indukcióval igazolható, hogy minden $x, y \in \Sigma^*$-ra $\delta_L^*(x/\theta_L, y) = xy/\theta_L$ teljesül. Jelöljük ezt az állítást †-rel.

Mindezek ismeretében az $L = L(M_L)$ egyenlőség a következő számolással adódik: minden $x \in \Sigma^*$-re

$x \in L(M_L)$	iff	$\delta_L^*(\lambda/\theta_L, x) \in L/\theta_L$	(definíció szerint)
	iff	$x/\theta_L \in L/\theta_L$	(az előbbi † megjegyzés szerint)
	iff	$x \in L$	(mivel θ_L szaturálja L-et).

□

1.10. Következmény. Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ egy nyelv és tegyük fel, hogy θ kongruencia szaturálja L-et. Ekkor $\theta \subseteq \theta_L$.

Bizonyítás. Lásd a 1.9. Tétel második lépésének bizonyítását. □

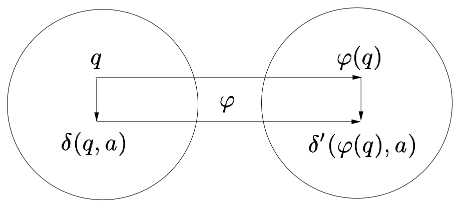
1.3. Automaták minimalizálása

Ebben a fejezetben a következőkkel foglalkozunk. Adott $L \subseteq \Sigma^*$ felismerhető nyelv esetén legyen $K_L = \{M \mid M \text{ automata és } L(M) = L\}$. K_L elemei közül a minimális állapotszámú érdekel bennünket. Kérdezzük, hogy mi az összefüggés a K_L-ben levő minimális állapotszámú automaták között? Meg fogjuk mutatni, hogy izomorfak egymással, más szóval a K_L-ben lévő minimális automata izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott. Továbbá, algoritmust adunk a K_L-ben lévő minimális automata meghatározására.

1.3.1. A minimális automata egyértelműségének bizonyítása

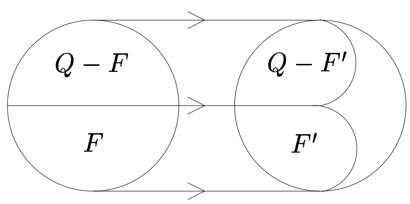
1.11. Definíció. Legyenek $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ és $M' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ automaták és $\varphi : Q \to Q'$ egy leképezés. A φ *homomorfizmus* M-ből M'-be, ha teljesülnek a következő feltételek:

(1) $\forall q \in Q,\ a \in \Sigma$: $\varphi(\delta(q, a)) = \delta'(\varphi(q), a)$,



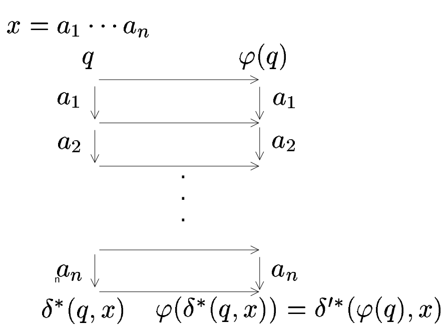
(2) $\varphi(q_0) = q'_0$,

(3) $\varphi^{-1}(F') = F$.



Ha φ ráképezés, akkor azt mondjuk, hogy M' *az* M *homomorf képe.* Ha φ bijekció, akkor *izomorfizmusnak* hívjuk és azt mondjuk, hogy M *és* M' *izomorfak*, jele $M \cong M'$. □

1.12. Megjegyzés. Bizonyítható, hogy (1) tulajdonság nemcsak egy $a \in \Sigma$ input szimbólumra, hanem tetszőleges $x \in \Sigma^*$ szóra is teljesül: minden $q \in Q$ állapot esetén $\varphi(\delta^*(q, x)) = \delta'^*(\varphi(q), x)$. A bizonyítás x hossza szerinti indukcióval végezhető el. Ezen tényt szemlélteti az alábbi ábra is:



□

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ esetén bevezetjük a $\delta^*(q, x) = qx_M$ jelölést. qx_M tehát az az állapot, melybe az M automata a q állapotból az x szó hatására kerül. Ha nem okoz félreértést, akkor a qx_M jelölésből M-et is elhagyjuk helyett és egyszerűen csak qx-et írunk. Így az 1.12. megjegyzésben szereplő $\varphi(\delta^*(q, x)) = \delta'^*(\varphi(q), x)$ egyenlőséget egyszerűen $\varphi(qx_M) = \varphi(q)x_{M'}$ alakban írhatjuk.

Megjegyezzük, hogy amennyiben M összefüggő, vagyis minden állapota elérhető a kezdőállapotból, akkor legfeljebb egy homomorfizmus létezhet M-ből M'-be. Valóban, ha M összefüggő, akkor minden állapota q_0x_M alakú és ezen állapot $\varphi(q_0x_M)$ képe meg kell, hogy egyezzen $\varphi(q_0)x_{M'}$-mel.

1.13. Lemma. Legyenek $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ és $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ automaták. Ha van homomorfizmus M-ből M'-be, akkor $L(M) = L(M')$.

Bizonyítás. Legyen $\varphi : Q \to Q'$ homomorfizmus M-ből M'-be. Ekkor minden $x \in \Sigma^*$-ra:

$$\begin{array}{rcll} x \in L(M) & \Longleftrightarrow & q_0x_M \in F & \text{(definíció szerint)} \\ & \Longleftrightarrow & \varphi(q_0x_M) \in F' & \text{(mivel } \varphi^{-1}(F') = F\text{)} \\ & \Longleftrightarrow & \varphi(q_0)x_{M'} \in F' & \text{(1.12. Megjegyzés)} \\ & \Longleftrightarrow & q_0'x_{M'} \in F' & \text{(mivel } \varphi(q_0) = q_0'\text{)} \\ & \Longleftrightarrow & x \in L(M') & \text{(definíció szerint).} \end{array}$$

□

1.14. Tétel. *Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ egy felismerhető nyelv.*
1) $M_L = (\Sigma^*/\rho_L, \Sigma, \delta_L, \varepsilon/\rho_L, L/\rho_L)$ az L-et felismerő minimális állapotszámú automata, ahol ρ_L az L szintaktikus jobbkongruenciája.
2) Az L-et felismerő minimális automata izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott.

Bizonyítás.
1) bizonyítása. A 1.5. Tétel harmadik lépésének bizonyításakor már láttuk, hogy az M_L L-et ismeri fel, azaz $L = L(M_L)$. Most megmutatjuk, hogy M_L minimális állapotszámú az L-et felismerő automaták között. Vegyünk evégett egy tetszőleges $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automatát, melyre ugyancsak $L = L(M)$ és mutassuk meg, hogy $||\Sigma^*/\rho_L|| \leq ||Q||$.

A bizonyítás úgy történik, hogy bevezetünk egy harmadik M' automatát, mely ugyancsak L-et ismeri fel, és megmutatjuk $||\Sigma^*/\rho_L||$ legfeljebb annyi mint M' állapotainak a száma, ez utóbbi pedig legfeljebb $||Q||$.

M' megadása végett definiáljuk a ρ relációt Σ^* felett a következőképpen: $x\rho y$ akkor és csak akkor, ha $q_0x = q_0y$. A 1.5. tétel első lépésének bizonyításakor már láttuk, hogy ρ véges indexű jobbkongruencia, mely szaturálja L-et. Legyen $M' = (\Sigma^*/\rho, \Sigma, \delta', \varepsilon/\rho, L/\rho)$, ahol $\delta'(x/\rho, a) = xa/\rho$.

Definiáljuk a $\varphi : \Sigma^*/\rho \to Q$ leképezést oly módon, hogy minden $x \in \Sigma^*$-ra $\varphi(x/\rho) = q_0x$. Megmutatjuk, hogy φ injektív homomorfizmus M'-ből M-be. Valóban:

- minden $x \in \Sigma^*$-re,

$$\varphi(\delta'(x/\rho, a)) = \varphi(xa/\rho) = q_0(xa) = \delta(q_0x, a) = \delta(\varphi(x/\rho), a);$$

- $\varphi(\varepsilon/\rho) = q_0\varepsilon = q_0$;
- minden $x \in \Sigma^*$-re,

  $q_0 x \in F \iff x \in L$ (definíció szerint)
  $\iff x/\rho \in L/\rho$ (mivel ρ szaturálja L-et),

  tehát $\varphi^{-1}(F) = L/\rho$;
- φ injektív, mivel minden $x, y \in \Sigma^*$-ra, ha $\varphi(x/\rho) = \varphi(y/\rho)$, akkor $q_0x = q_0y$ (a φ definíciója szerint), tehát $x\rho y$ vagy más szóval $x/\rho = y/\rho$ (a ρ definíciója szerint).

Tehát bebizonyítottuk, hogy $L(M) = L(M')$ és $||\Sigma^*/\rho|| \leq ||Q||$. Másrészt, mivel ρ szaturálja L-et, az 1.6. Következmény miatt teljesül a $\rho \subseteq \rho_L$ tartalmazás, amiből kapjuk, hogy $||\Sigma^*/\rho_L|| \leq ||\Sigma^*/\rho||$.

A két egyenlőtlenséget összerakva kapjuk, hogy

$$||\Sigma^*/\rho_L|| \leq ||\Sigma^*/\rho|| \leq ||Q||,$$

vagyis, hogy M_L minimális állapotszámú az L-et felsimerő automaták között.

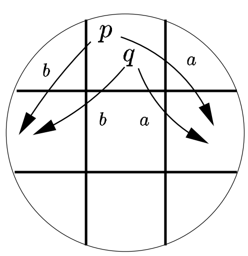
2) bizonyítása Megmutatjuk, hogy bármely, L-et felismerő minimális állapotszámú automata izomorf M_L-lel. Legyen evégett M egy minimális állapotszámú L-et felismerő automata. Mivel M minimális állapotszámú, az 1) részben kapott hármas egyenlőtlenség $||\Sigma^*/\rho_L|| = ||\Sigma^*/\rho|| = ||Q||$ alakot ölt. Következésképpen $\rho = \rho_L$ és így $M' = M_L$. Továbbá, mivel $||\Sigma^*/\rho|| = ||Q||$, az 1) részben szereplő φ injektív homomorfizmus szürjektív (ráképezés) is. Tehát M' és M izomorfak, amiből kapjuk, hogy M_L és M szintén izomorfak. □

1.3.2. A minimális állapotszámú automata algoritmikus meghatározása

Kongruencia automatákon

1.15. Definíció. (a) Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata és $\rho \subseteq Q \times Q$ egy ekvivalenciareláció M-en. *ρ kongruencia M-en*, ha

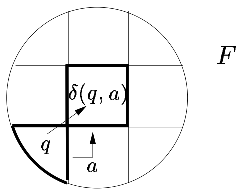
(1) $\forall p, q \in Q,\ a \in \Sigma$-ra ha $p\,\rho\,q$ akkor $\delta(p, a)\,\rho\,\delta(q, a)$.



Q

(2) ρ szaturálja F-et, azaz $\forall p, q \in Q$-ra ha $p\,\rho\,q$ akkor $p \in F \iff q \in F$.

(b) Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata, ρ pedig kongruenciareláció M-en. *M-nek a ρ által meghatározott faktorautomatája* a következő automata: $M/\rho = (Q/\rho, \Sigma, \delta_\rho, q_0/\rho, F/\rho)$, ahol $\delta_\rho(q/\rho, a) = \delta(q, a)/\rho$.

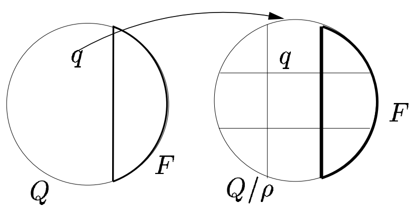


□

Könnyen belátható, hogy a fenti definícióban szereplő δ_ρ átmenetfüggvény jóldefiniált, mert ρ kongruencia.

1.16. Lemma. Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata, ρ pedig egy kongruenciareláció M-en. Akkor M/ρ az M homomorf képe.

Bizonyítás. Definiáljuk a $\varphi : Q \to Q/\rho$ leképezést úgy, hogy minden $q \in Q$-ra $\varphi(q) = q/\rho$.



Nyilvánvaló az, hogy φ szürjektív. Megmutatjuk, hogy φ homomorfizmus is:

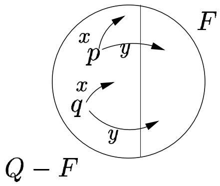
- $\forall q \in Q, a \in \Sigma$-ra $\varphi(\delta(q, a)) = \delta_\rho(\varphi(q), a)$, mert
$$\varphi(\delta(q, a)) = \delta(q, a)/\rho = \delta_\rho(q/\rho, a) = \delta_\rho(\varphi(q), a).$$
- $\varphi(q_0) = q_0/\rho$.
- $\varphi^{-1}(F') = F$ teljesül, mert ρ szaturálja F-et.

1.17. Következmény. Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata, ρ pedig egy kongruenciareláció M-en. Akkor $L(M) = L(M/\rho)$.

Bizonyítás. Következik az 1.16. és 1.13. Lemmákból. □

Most bevezetünk egy partikuláris kongruenciát az M automatán.

1.18. Definíció. Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata. Definiáljuk $\rho_M \subseteq Q \times Q$ relációt a következőképpen: $\forall p, q \in Q$-ra $p\,\rho_M\,q$ akkor és csak akkor teljesüljön, ha minden $x \in \Sigma^*$ esetén $px \in F \Leftrightarrow qx \in F$.



(A ρ_M egy ekvivalens definícióját kapjuk a következőképpen. Minden $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automata és $p \in Q$ állapot esetén legyen $M_p = (Q, \Sigma, \delta, p, F)$. Mármost $\forall p, q \in Q$-ra álljon fenn $p \, \rho_M \, q$ akkor és csak akkor, ha $L(M_p) = L(M_q)$.) □

1.19. Megjegyzés. ρ_M kongruencia M-en.

Bizonyítás.

+ Nyilvánvaló, hogy ρ_M ekvivalencia reláció.

+ Megmutatjuk, hogy ha $p \, \rho_M \, q$, akkor $\forall a \in \Sigma$-ra $\delta(p, a) \, \rho_M \, \delta(q, a)$. A bizonyítás indirekt: tegyük fel, hogy $p \, \rho_M \, q$ és van olyan $a \in \Sigma$, hogy $\delta(p, a)$ nincs ρ_M relációban $\delta(q, a)$-val. Akkor van olyan $z \in \Sigma^*$, melyre $(pa)z \in F \Leftrightarrow (qa)z \notin F$. Akkor viszont $p(az) \in F \iff q(az) \notin F$, mert $p(az) = (pa)z$ és $q(az) = (qa)z$, ami ellentmondás, mert $p \, \rho_M \, q$.

+ Megmutatjuk, hogy ρ_M szaturálja F-et. Legyen evégett $p \, \rho_M \, q$. Akkor minden $x \in \Sigma^*$ esetén $px \in F \Leftrightarrow qx \in F$. Ezt alkalmazva $x = \varepsilon$-ra, kapjuk $p \in F \Leftrightarrow q \in F$. Tehát ρ minden osztálya vagy részhalmaza F-nek vagy az F-fel való metszete üres.

□

1.20. Definíció. Egy M automatát *redukáltnak* nevezünk, ha ρ_M az egyenlőség reláció (azaz ρ_M minden osztályában pontosan egy elem van). □

Nyilvánvaló az, hogy minden minimális állapotszámú automata redukált. (Ha ugyanis ρ_M nem az egyenlőség reláció, akkor az M/ρ_M automatának kevesebb állapota van mint M-nek, ugyanakkor a 1.17. Következmény értelmében M és M/ρ_M ugyanazt a nyelvet ismerik fel.)

1.21. Definíció. Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata. M *összefüggő része* az $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F')$ automata, ahol

- $Q' = \{q_0 x \mid x \in \Sigma^*\}$,
- $F' = F \cap Q'$,
- $\delta'(p, a) = \delta(p, a)$ minden $p \in Q'$-re.

M *összefüggő*, ha $M = M'$. □

Nyilvánvaló, hogy ha M' az M összefüggő része, akkor $L(M) = L(M')$. Ugyancsak nyilvánvaló, hogy ha M minimális, akkor összefüggő.

1.22. Tétel. *Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ felismerhető nyelv és legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata, melyre $L = L(M)$. Legyen $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ az M összefüggő része. Akkor*

$$M'/\rho_{M'} = (Q'/\rho_{M'}, \Sigma, \delta'_{\rho_{M'}}, q_0'/\rho_{M'}, F'/\rho_{M'})$$

az L-et felismerő minimális állapotszámú automata.

Bizonyítás. Először is megjegyezzük, hogy a 1.17. Következmény értelmében $L = L(M'/\rho_{M'})$.

A következőkben megmutatjuk, hogy $M'/\rho_{M'}$ minimális. Indirekt bizonyítást adunk.

Tételezzük fel tehát, hogy $M'/\rho_{M'}$ nem minimális, azaz van egy további $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ automata, melyre ugyancsak $L(M_1) = L$, de $||Q_1|| < ||Q'/\rho_{M'}||$. Mivel M' összefüggő, $M'/\rho_{M'}$ ugyancsak összefüggő. Így minden $q/\rho_{M'}$ állapothoz található olyan x szó amire $(q_0'/\rho_{M'})x = q/\rho_{M'}$. Tekintsük minden ilyen x-re a $q_1 x$ állapotot M_1-ben.
Mivel $||Q_1|| < ||Q'/\rho_{M'}||$, kell, hogy legyen két olyan x és y szó, melyekre

$$(q_0'/\rho_{M'})x = q_0'x/\rho_{M'} \neq q_0'y/\rho_{M'} = (q_0'/\rho_{M'})y \quad \text{és} \quad q_1 x = q_1 y.$$

Mivel $M'/\rho_{M'}$ redukált, van egy olyan $z \in \Sigma^*$ szó, melyre

$$(q_0'x/\rho_{M'})z = q_0'xz/\rho_{M'} = (q_0'/\rho_{M'})xz \in F'/\rho_{M'}$$

akkor és csak akkor, ha

$$(q_0'y/\rho_{M'})z = q_0'yz/\rho_{M'} = (q_0'/\rho_{M'})yz \notin F'/\rho_{M'}.$$

Ez utóbbi azt jelenti, hogy $xz \in L(M'/\rho_{M'})$ akkor és csak akkor, ha $yz \notin L(M'/\rho_{M'})$, vagyis, ha az xz és yz szavak közül pontosan az egyik van $L(M'/\rho_{M'})$-ben.

Másrészt viszont, $q_1 x = q_1 y$ miatt kapjuk $(q_1 x)z = (q_1 y)z$, azaz $q_1(xz) = q_1(yz)$, ami azt jelenti, hogy $xz \in L(M_1)$ akkor és csak akkor, ha $yz \in L(M_1)$. Más szóval, az xz és yz szavakra igaz, hogy vagy mindkettő $L(M_1)$-ben van vagy egyik sincs benne. Ez pedig ellentmondás, mivel $L(M_1) = L(M'/\rho_{M'})$, következésképpen$M'/\rho_{M'}$ is minimális. □

1.23. Következmény. Minden $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automata esetén $M_L \cong M'/\rho_{M'}$.

Bizonyítás. Következik az 1.14. és 1.22. Tételekből. □

Most megadunk egy olyan algoritmus, mely egy összefüggő M automata ismeretében kiszámítja ρ_M-et.

1.24. Algoritmus. ρ_M kiszámítása.

Input $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ összefüggő automata.

Output ρ_M kongruencia reláció.

Módszer Közelítjük ρ_M-et a $\rho_0, \rho_1, \ldots,$ Q feletti relációkkal.

(i) Legyen ρ_0 a következő: minden $p, q \in Q$-ra, $p\rho_0 q$ akkor és csak akkor teljesül, ha $p \in F \iff q \in F$. Legyen $i = 0$.

(ii) Legyen ρ_{i+1} a következő: minden $p, q \in Q$-ra, $p\rho_{i+1}q$ akkor és csak akkor teljesül, ha $p\rho_i q$ és minden $a \in \Sigma$-ra, $\delta(p,a)\rho_i\delta(q,a)$.

(iii) Ha $\rho_i = \rho_{i+1}$, akkor állj, különben legyen $i = i + 1$ és menjünk (i)-ra.

□

1.25. Lemma. Az 1.24. algoritmus minden M esetén terminál (megáll) és ρ_M-et számítja ki.

Bizonyítás. Mivel $\rho_0 \supseteq \rho_1 \supseteq \dots$ „=”, van olyan $i \geq 0$, melyre $\rho_i = \rho_{i+1}$, ezért az 1.24. algoritmus mindig terminál.

Először bebizonyítjuk, hogy ha $\rho_i = \rho_{i+1}$ valamely i-re, akkor $\rho_{i+1} = \rho_{i+2} = \dots$ is teljesül. Indirekt bizonyítást adunk, evégett felteszzük, hogy $\rho_i = \rho_{i+1}$ és $\rho_{i+1} \supset \rho_{i+2}$. Akkor van két olyan $p, q \in Q$ állapot, melyekre $p\rho_{i+1}q$, ugyanakkor *nem teljesül* $p\rho_{i+2}q$. Ez utóbbi azt jelenti, hogy van olyan $a \in \Sigma$ szimbólum, melyre *nem teljesül* $\delta(p,a)\rho_{i+1}\delta(q,a)$. Mivel $\rho_i = \rho_{i+1}$, szintén *nem teljesül* $\delta(p,a)\rho_i\delta(q,a)$, tehát *nem teljesül* $p\rho_{i+1}q$ sem. Ellentmondás, mivel feltevésünk szerint $p\rho_{i+1}q$.

Legyen i_0 a legkisebb olyan szám, melyre $\rho_{i_0} = \rho_{i_0+1}$. Megmutatjuk, hogy $\rho_{i_0} = \rho_M$. Ehhez szükségünk van a következő állításra.

Állítás: Minden $i, l \geq 0$ egész szám, $p, q \in Q$ állapot és $z \in \Sigma^*$ szó esetén, melyre $|z| = l$, a $p\rho_{i+l}q$ relációból következik, hogy $pz\rho_i qz$.
Az állítás bizonyítása: l szerinti indukció. Ha $l = 0$, akkor $z = \varepsilon$, így $p\rho_{i+0}q$-ból következik, hogy $p\varepsilon\rho_i q\varepsilon$.

Most tegyük fel, hogy az állítás l-re teljesül. Legyen evégett $z = av \in \Sigma^*$, melyre $|v| = l$ (tehát $|z| = l+1$) és tegyük fel, hogy $p\rho_{i+l+1}q$. Akkor, a ρ_{i+l+1} definíciója miatt, $pa\rho_{i+l}qa$ szintén teljesül, amiből az indukció feltevés miatt $(pa)v\rho_i(qa)v$ következik. Mivel $(pa)v = p(av) = pz$ és $(qa)v = q(av) = qz$, kapjuk, hogy $pz\rho_i qz$.

Végül megmutatjuk, hogy $\rho_{i_0} = \rho_M$.

A $\rho_{i_0} \subseteq \rho_M$ tartalmazás bizonyításával kezdjük. Tegyük fel, hogy $p\rho_{i_0}q$. Legyen $z \in \Sigma^*$ egy tetszőleges szó, melyre $|z| = l$. Mivel $\rho_{i_0} = \rho_{i_0+l}$, a $p\rho_{i_0+l}q$ reláció szintén teljesül, ahonnan az imént bebizonyított állítás szerint kapjuk, hogy $pz\rho_{i_0}qz$. Ez utóbbiból, a $\rho_0 \supseteq \rho_{i_0}$ tartalmazás miatt $pz\rho_0 qz$ következik. Ez, a ρ_0 definíciója szerint azt jelenti, hogy $pz \in F \iff qz \in F$. Mivel z egy tetszőleges szó volt, $p\rho_M q$.

A fordított irányú $\rho_M \subseteq \rho_{i_0}$ tartalmazás bizonyítása végett elegendő megmutatni a következőt: minden $p, q \in Q$ és $i \geq 0$, ha *nem teljesül* $p\rho_i q$, akkor *nem teljesül* $p\rho_M q$. Ezb utóbbit i szerinti indukcióval bizonyítjuk be.

$i = 0$ eset: Ha *nem teljesül* $p\rho_0 q$, takkor $p \in F \iff q \notin F$, ami szerint *nem teljesül* $p\rho_M q$.

$i \Rightarrow i+1$: Tegyük fel, hogy *nem teljesül* $p\rho_{i+1}q$. Akkor vagy *nem teljesül* $p\rho_i q$ vagy ($p\rho_i q$ és van olyan $a \in \Sigma$, melyre *nem teljesül* $pa\rho_i qa$). Az első esetben az indukció feltevés szerint *nem teljesül* $p\rho_M q$. Az második esetben, ugyancsak az indukció feltevés szerint *nem teljesül* $pa\rho_M qa$, tehát van olyan $z \in \Sigma^*$ szó, melyre $(pa)z \in F \iff (qa)z \notin F$. Mivel $(pa)z = p(az)$ és hasonlóan $(qa)z = q(az)$, kapjuk, hogy $p(az) \in F \iff q(az) \notin F$, ami azt jelenti, hogy *nem teljesül* $p\rho_M q$.

Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük. □

1.4. Automaták kisérő monoidjai, felismerhető nyelvek jellemzése monoidokkal

Tetszőleges Q halmaz esetén a $Q^Q = \{f \mid f$ leképezés Q-ból Q-ba $\}$ monoid lesz, melynek szorz ás műveletét a következőképpen definiáljuk: minden $f, g \in Q^Q$ és $q \in Q$ esetén, $f \cdot g(q) = g(f(q))$. Nyilvánvaló, hogy Q^Q egységeleme a Q feletti identikus leképezés lesz.

Egy $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automata átmenet monoidját (vagy leképezés monoidját) a következőképpen definiáljuk. Minden $x \in \Sigma^*$ szóhoz rendeljük hozzá az $f_x : Q \to Q$ leképezést, melyet úgy definiálunk, hogy minden $q \in Q$-ra legyen $f_x(q) = qx$. Legyen $T_M = \{f_x \mid x \in \Sigma^*\}$.

1.26. Lemma. Minden $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automata esetén T_M a Q^Q részmonoidja.

Bizonyítás. Bebizonyítjuk, hogy T_M zárt a $\cdot$ műveletre. Legyen evégett $x, y \in \Sigma^*$. Akkor minden $q \in Q$-ra,

$$(f_x \cdot f_y)(q) = f_y(f_x(q)) = f_y(qx) = (qx)y = q(xy) = f_{xy}(q).$$

Tehát $f_x \cdot f_y = f_{xy}$. Ugyancsak könnyen látható, hogy f_ε a T_M egységeleme. □

1.27. Definíció. A T_M monoidot M *átmenet monoidjának (vagy leképezés monoidjának)* nevezzük.

1.28. Megjegyzés. Tetszőleges $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automata esetén a $\varphi(x) = f_x$ által definiált $\varphi : \Sigma^* \to Q^Q$ leképezés Σ^*-ból Q^Q-ba történő homomorfizmus. Továbbá, $\varphi(\Sigma^*) = T_M$.

Most bevezetünk egy másik monoidot.

1.29. Definíció. Tetszőleges $L \subseteq \Sigma^*$ esetén a Σ^*/θ_L monoidot L *szintaktikus monoidjának nevezzük.*

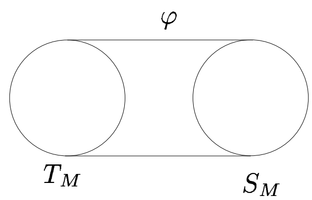
Egy adott M automata esetén szoros kapcsolat van M átmenet monoidja és $L(M)$ szintaktikus monoidja között. Ezt fejezi ki a következő tétel.

1.30. Tétel. *Legyen* $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *egy automata és* $L = L(M)$. *Ekkor* S_L *a* T_M *homomorf képe. Továbbá ha* M *minimális, akkor* $S_L \cong T_M$.

Bizonyítás. a) Vegyük a $\varphi : T_M \to S_L$ leképezést, ahol $\forall x \in \Sigma^*$-ra $\varphi(f_x) = x/\theta_L$. Megmutatjuk, hogy φ szürjektív homomorfizmus. Legyen $x, y \in \Sigma^*$, akkor:

$$\begin{aligned}
\varphi(f_x \cdot f_y) &= \varphi(f_{xy}) && \text{(szorzás } T_M\text{-ben)}\\
&= xy/\theta_L && \text{(}\varphi\text{ definíciójából)}\\
&= x/\theta_L \cdot y/\theta_L && \text{(szorzás } S_L\text{-ben)}\\
&= \varphi(f_x)\cdot\varphi(f_y) && \text{(}\varphi\text{ definíciójából).}
\end{aligned}$$

Tehát φ homomorfizmus. Továbbá, minden $x \in \Sigma^*$-ra: $x/\theta_L \in S_L$ őse $f_x \in T_M$, ezért φ szürjektív.



b) A továbbiakban megmutatjuk, hogy amennyiben M minimális, úgy φ még injektív is (tehát izomorfizmus).

Tegyük fel tehát, hogy M minimális és vegyünk $x, y \in \Sigma^*$ szavakat úgy, hogy $\varphi(f_x) = \varphi(f_y)$. Megmutatjuk, hogy $f_x = f_y$, vagyis, hogy minden $q \in Q$-ra $f_x(q) = f_y(q)$.

Legyen evégett $q \in Q$. Mivel M minimális, tehát összefüggő, van olyan $u \in \Sigma^*$, melyre $q = q_0u$. Így $f_x(q) = (q_0u)x = q_0ux$ és hasonlóan $f_y(q) = q_0uy$. Másrészt, mivel $\varphi(f_x) = \varphi(f_y)$, az $x/\theta_L = y/\theta_L$ egyenlőség is teljesül. Így minden $v \in \Sigma^*$-re, $uxv \in L$ akkor és csak akkor, ha $uyv \in L$, ami másképp írva azt jelenti, hogy minden $v \in \Sigma^*$-re, $(q_0ux)v \in F$ akkor és csak akkor, ha $(q_0uy)v \in F$. Tehát $(q_0ux)\rho_M(q_0uy)$. Mivel M minimális, így redukált is, tehát $q_0ux = q_0uy$, azaz $f_x(q) = f_y(q)$. Kaptuk, hogy $f_x = f_y$ azaz, hogy φ injektív.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. □

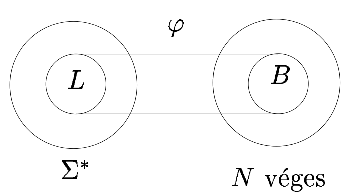
Most megadjuk a felismerhető nyelvek monoidokkal történő jellemzését.

1.31. Tétel. *Tetszőleges $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv esetén a következő három állítás ekvivalens:*

(1) L felismerhető

(2) S_L véges

(3) Van olyan N véges monoid, $\varphi : \Sigma^* \to N$ homomorfizmus, és egy $B \subseteq N$, hogy $L = \varphi^{-1}(B)$.



Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2) : Mivel S_L akkor és csak akkor véges, ha θ_L véges indexű, az állítás következik a 1.9. Tételből.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Tegyük fel, hogy S_L véges. Legyen $N = S_L = \Sigma^*/\theta_L$ és $B = L/\theta_L$. Továbbá definiáljuk a $\varphi : \Sigma^* \to \Sigma^*/\theta_L$ leképezést a $\varphi(x) = x/\theta_L$ egyenlettel. Ez a

φ homomorfizmus és, mivel θ_L szaturálja L-et, (lásd 1.8. Lemma) kapjuk, hogy $L = \varphi^{-1}(B)$.

$\underline{(3) \Rightarrow (1):}$ Tegyük fel, hogy van egy véges N monoid, egy $\varphi : \Sigma^* \to N$ homomorfizmus és $B \subseteq N$ melyekre $L = \varphi^{-1}(B)$.

Definiáljuk az $M = (N, \Sigma, \delta, 1, B)$ automatát, ahol 1 az N egységeleme, a δ átmenetfüggvény pedig a következő: minden $q \in N$-re és $a \in \Sigma$-ra, $\delta(q, a) = q \cdot \varphi(a)$. (Itt $\cdot$ az N-beli szorzást jelöli.)

Könnyen igazolható, hogy ekkor minden $x \in \Sigma^*$-re, $\delta^*(q, x) = q \cdot \varphi(x)$. ($x$ hossza szeritni indukció.)

Végül bebizonyítjuk, hogy $L = L(M)$. Valóban, minden $x \in \Sigma^*$-re:

$$\begin{array}{lcll} x \in L(M) & \iff & \delta^*(1, x) \in B & \text{(definíció szerint)} \\ & \iff & 1 \cdot \varphi(x) \in B & \text{(a fenti megjegyzés miatt)} \\ & \iff & \varphi(x) \in B & \text{(1 egységelem } N\text{-ben,)} \end{array}$$

tehát L felismerhető. $\square$

1.5. Felismerhető nyelvek jellemzése másodrendű logikai formulákkal

Legyen Σ egy ábécé, és tekintsük a $<$ kétváltózós és a $\{Q_a \mid a \in \Sigma\}$ egyváltozós relációszimbólumokat. A $<$ és a $\{Q_a \mid a \in \Sigma\}$ relációszimbólumokból és változókból a logikában megismert módon logikai formulákat építhetünk fel.

Például legyen $\Sigma = \{a, b\}$, ekkor $\varphi = \exists x \exists y (x < y)$ egy formula.

Másrészt, minden $w = a_1 \ldots a_n \in \Sigma^*$ szó meghatároz egy $\mathcal{A}_w = (\{1, \ldots, n\}, <, \{Q_a \mid a \in \Sigma\})$ struktúrát, ahol az $1, \ldots, n$ számok w-beli pozíciókat jelentenek, a $<$ és minden $a \in \Sigma$-ra a Q_a pedig egy egyváltozós reláció, melyeket a következőképpen értelmezünk az $\{1, \ldots, n\}$ felett:

- $<$: kisebb reláció
- minden $a \in \Sigma$-ra és $i \in \{1, \ldots, n\}$-re: $Q_a(i) = 1 \iff a_i = a$.

Példák: $\Sigma = \{a, b\}$ esetén,

- ha $w = aba$, akkor $\mathcal{A}_w = (\{1, 2, 3\}, <, Q_a, Q_b)$,
- ha $w = a$, akkor $\mathcal{A}_w = (\{1\}, <, Q_a, Q_b)$ alakú.

Ármost ha adott egy φ formula, akkor keressük, azon w szavak halmazát, melyekre az $\mathcal{A}_w$ struktúra kielégíti φ-t. Röviden, az $L_\varphi = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A}_w \models \varphi\}$, még rövidebben, az $L_\varphi = \{w \in \Sigma^* \mid w \models \varphi\}$ nyelvet keressük.

Például, az előbbi $\varphi = \exists x \exists y (x < y)$ formula esetén L_φ azon szavakból áll, melyekben van két egymás utáni pozíció, azaz $L_\varphi = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 2\}$. Ezért azt mondjuk, hogy az $\{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 2\}$ nyelv definiálható elsőrendű formulával.

Bevezetjük a következő rövidítéseket:

- $x \leq y \ : \ \neg(y < x)$
- $x = y \ : \ x \leq y \wedge y \leq x$
- $\mathrm{First}(x) \ : \ \forall y (x \leq y)$

- Last(x) : $\forall y(y \leq x)$

- $y = x+1$: $x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y)$

Egy másik példa, tekintsük a $\psi = \exists x(First(x) \wedge Q_a(x)) \wedge \exists x(Last(x) \wedge Q_b(x))$ formulát (ami nyilvánvalóan ekvivalens a $\exists x \exists y(First(x) \wedge Q_a(x) \wedge Last(y) \wedge Q_b(y))$ formulával). Ezen formulát azok a szavak elégítik ki, melyeknek első betűje a, utolsó betűje b, következésképpen az első betű nem egyezik meg az utolsó betűvel. Az ilyen szavak halmaza az $a\Sigma^*b$ nyelv, tehát $L_\psi = a\Sigma^*b$. Tehát, az $a\Sigma^*b$ nyelv ugyancsak definiálható elsőrendű formulával.

Az $L = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \text{ páros } \}$ nyelvet nem tudjuk elsőrendű formulákkal definiálni. Szükség van még $X, Y, \ldots$ másodrendű változókra és megengedjük az $x \in X$ relációt. X, Y másodrendű változók értékei pozíciók halmazai lehetnek, míg x, y változók értékei továbbra is pozíciók. Így X, Y a pozíciók halmaza feletti egyváltozós (monadikus) relációknak tekinthetők: adott $\mathcal{A}_w = (\{1, \ldots, n\}, <, \{Q_a \mid a \in \Sigma\})$ struktúra, φ formula és a φ-ben szereplő x, y elsőrendű és X, Y másodrendű változók esetén

x, y értékei: $\{1, \ldots, n\}$ elemei

X, Y értékei: $\{1, \ldots, n\}$ részhalmazai.

Mármost az előbbi L nyelvet, vagyis a Σ feletti páros hosszúságú szavak halmazát az alábbi formula definiálja:

$$\begin{aligned}&\exists X(\forall x((First(x) \to x \in X) \wedge (Last(x) \to x \notin X)) \wedge \\ &\qquad \forall x \forall y((y = x+1) \to (x \in X \leftrightarrow y \in Y))).\end{aligned}$$

A formula a következőképpen "olvasható ki". Van pozícióknak egy olyan X halmaza, melynek az első pozíció eleme, az utolsó pozíció nem eleme és bármely két egymás után következő (szomszédos) pozíció közül az egyik benne van, a másik pedig nincs. Ilyen X akkor van, ha a szó hossza páros, tudniillik ekkor X éppen a páratlan számú pozíciók halmaza. Tehát, a páros hosszú szavakból álló nyelv definiálható másodrendű formulával

Felidézzük, hogy ha egy logikában:

- nincsenek kvantorok, akkor azt zérusrendű logikának

- $\forall x, \forall y$ alakú kvantifikálást engedünk meg, ahol x, y változók, akkor azt elsőrendű logikának

- $\forall x, \forall y, \forall p, \forall q$ alakú kvantifikálást engedünk meg, ahol x, y változók, p, q pedig predikátumszimbólumok, akkor azt másodrendű logikának,

- ha az előbbi pontban p, q csak egyváltozós predikátumszimbólumok lehetnek, akkor azt monadikus másodrendű logikának

nevezzük.

1.5.1. A monadikus másodrendű (MSO) logika definíciója

Először definiáljuk az MSO logika szintaxisát. Legy adott egy Σ ábécé.

Változók:

$V_1 = x, y, \ldots$ elsőrendű változók.

$V_2 = X, Y, \ldots$ másodrendű változók.

Atomi formulák: $x < y$, $y = x + 1$, $x \in X$ és minden $a \in \Sigma$-ra $Q_a(x)$.

Formulák:

(i) minden atomi formula formula.

(ii) ha φ és ψ formula, akkor $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\exists x\varphi$, $\exists X\varphi$ is formulák.

Rövidítések: $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$, $\forall x\varphi$, $\forall X\varphi$ a szokásos módon.

Megjegyzés:

Ha a V_2 változóhalmazt, az $x \in X$ relációt és a $\exists X$ kvantifikálást nem engedjük meg, akkor a logika elsőrendű.

Egy adott φ formula esetén a szabad és kötött változók valamint a kiigazított formula fogalmát a ugyanúgy értelmezzük, mint a már ismert predikátumkalkulus esetén. Amennyiben adott egy φ formula, feltehetjük, hogy az kiigazított, vagyis a benne szereplő szabad és kötött változók halmazai diszjunktak és a benne szereplő különböző kvantor előfordulások különböző változókat kötnek le.

Most definiáljuk az MSO logika szemantikáját.

1.32. Definíció. Legyenek $W_1(\subseteq V_1)$ és $W_2(\subseteq V_2)$ véges változó halmazok. Egy (W_1, W_2) *struktúrán* egy $w = (a_1, S_1, T_1) \ldots (a_r, S_r, T_r)$ sorozatot értünk, ahol $a_1, \ldots, a_r \in \Sigma$, $S_1, \ldots, S_r \subseteq W_1$ és $T_1, \ldots, T_r \subseteq W_2$ (tehát $w \in (\Sigma \times 2^{W_1} \times 2^{W_2})^* = (\Sigma \times \mathcal{P}(W_1) \times \mathcal{P}(W_2))^*$ és ahol a következő feltételek teljesülnek:

$$\bigcup_{i=1}^{r} S_i = W_1,\ \ S_i \cap S_j = \emptyset,\ \text{ha } i \neq j.$$

□

Ha adott φ formula, W_1, W_2 szabad változókkal és egy $w = (a_1, S_1, T_1) \ldots (a_r, S_r, T_r)$ alakú (W_1, W_2) struktúra, akkor definiáljuk a "w kielégíti φ" vagy röviden $w \models \varphi$ fogalmát. (Minden φ-ben szereplő $x \in W_1$ és $X \in W_2$ szabad változó kap egy értéket a következő módon: (1) ha $x \in W_1$, akkor x értéke azon egyértelműen meghatározott i lesz, melyre $x \in S_i$, (2) ha $X \in W_2$, akkor X értéke az $\{i \mid X \in T_i\}$ halmaz lesz.

1.33. Definíció. Legyen φ egy formula, melynek szabad változói (W_1, W_2) és legyen $w = (a_1, S_1, T_1) \ldots (a_r, S_r, T_r)$ egy (W_1, W_2) struktúra. A $w \models \varphi$-t (azaz a "w kielégíti φ" fogalmát) formulaindukcióval definiáljuk:

- $\varphi = x < y$ esetén: $w \models \varphi \iff x \in S_i$ és $y \in S_j$ és $i < j$

- $\varphi = (y = x+1)$ esetén: $w \models \varphi \iff x \in S_i$ és $y \in S_{i+1}$
- $\varphi = Q_a(x)$, ahol $a \in \Sigma$ esetén: $w \models \varphi \iff x \in S_i$ és $a = a_i$
- $\varphi = x \in X$ esetén: $w \models \varphi \iff x \in S_i$ és $X \in T_i$
- $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ esetén: $w \models \varphi \iff w \models \varphi_1$ és $w \models \varphi_2$
- $\varphi = \neg\, \varphi_1$ esetén: $w \models \varphi \iff$ nem teljesül $w \models \varphi_1$
- $\varphi = \exists x \varphi_1$ esetén: $w \models \varphi \iff \exists 1 \le i \le r :\ w' \models \varphi_1$,
  ahol $w' = (a_1, S_1, T_1) \dots (a_i, S_i \cup \{x\}, T_i) \dots (a_r, S_r, T_r)$
- $\varphi = \exists X \varphi_1$ esetén: $w \models \varphi \iff \exists 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le r :\quad w' \models \varphi_1$,
  ahol $w' = (a_1, S_1, T_1') \dots (a_r, S_r, T_r')$ és minden $1 \le j \le r$-re

$$T_j' = \begin{cases} T_j, \text{ ha } j \notin \{i_1, \dots, i_k\} \\ T_j \cup \{X\} \text{ különben.} \end{cases}$$

□

1.34. Definíció. Legyen φ egy formula (W_1, W_2) szabad változókkal, akkor

$$L_\varphi = \{w \mid w \text{ egy } (W_1, W_2) \text{ struktúra és } w \models \varphi\}.$$

□

Nyilvánvalóan $L_\varphi \subseteq (\Sigma \times 2^{W_1} \times 2^{W_2})^*$. Továbbá, ha φ zárt, akkor $W_1 = W_2 = \emptyset$ ezért minden (W_1, W_2) struktúra $w = (a_1, \emptyset, \emptyset) \dots (a_r, \emptyset, \emptyset)$ alakú. Tehát ha φ zárt, akkor minden (W_1, W_2) struktúra azonosítható Σ^* egy elemével és azt mondhatjuk, hogy $L_\varphi \subseteq \Sigma^*$.

Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv definiálható monadikus másodrendű formulával, ha van olyan φ (zárt monadikus másodrendű formula), melyre $L = L_\varphi$. Azon nyelvek osztályát, melyek olyan monadikus másodfokú formulával definiálhatók, amiben csak az $y = x+1$ numerikus reláció szerepel MSO(+1)-gyel jelöljük.

1.5.2. A reguláris nyelvek jellemzése MSO logikával

1.35. Tétel. *MSO(+1) megegyezik az automatával felismerhető nyelvek osztályával.*

Bizonyítás.

a) Felismerhető $\subseteq$ MSO(+1)

Legyen $L = L(M)$, ahol $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ determinisztikus automata és $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$. Ekkor minden $w \in \Sigma^*$-ra

$w \in L(M) \iff$ az $\{1, \dots, |w|\}$ halmaz partícionálható az $X_1, \dots, X_n$ halmazokba úgy, hogy teljesülnek a következő tulajdonságok.

(Az $i \in X_j$ tartalmazás, ahol $i = 1, \dots, |w|$, $j = 1, \dots, n$ azt jelenti, hogy M az i-edik pozíción lévő betű elolvasása előtt a q_j állapotban van.)

1) $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = \{1, \dots, |w|\}$.

2) Ha $i \neq j$, akkor $X_i \cap X_j = \emptyset$.

3) $1 \in X_1$.

4) $\forall i = 1, \dots, |w| - 1$-re, ha $i \in X_j$ és $i + 1 \in X_k$, és w i-edik betűje a, akkor $\delta(q_j, a) = q_k$.

5) Ha $|w| \in X_i$ és w utolsó betűje a, akkor $\exists q \in F :\ \delta(q_i, a) = q$.

Ezen tulajdonságok leírhatóak a következőképpen megadott $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ monadikus másodfokú formulákkal:

1) $\varphi_1 = \forall x\ (x \in X_1 \vee \dots \vee x \in X_n) = \forall x\ (\bigvee_{1 \le i \le n} x \in X_i)$

2) $\varphi_2 = \forall x\ (\bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg(x \in X_i \wedge x \in X_j))$

3) $\varphi_3 = \forall x\ (\forall y\ (x \neq y + 1) \to x \in X_1)$

4) $\varphi_4 = \forall x \forall y\ (y = x + 1 \to \bigwedge_{1 \le i,j \le n} ((x \in X_i \wedge y \in X_j) \to \bigvee_{\substack{a \in \Sigma \\ \delta(q_i,a) = q_j}} Q_a(x)))$

5) $\varphi_5 = \forall x (\forall y\ (y \neq x + 1) \to \bigwedge_{1 \le i \le n} (x \in X_i \to \bigvee_{\substack{a \in \Sigma \\ \delta(q_i,a) \in F}} Q_a(x)))$

Legyen $\varphi = \exists X_1 \dots \exists X_n (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_5)$. Akkor φ zárt és a fentiek miatt $L_\varphi = L(M)$. Ezzel az egyik irányú tartalmazás bizonyítását befejeztük.

b) MSO(+1) $\subseteq$ Felismerhető

Legyen φ egy olyan monadikus másodrendű formula, melynek szabad változói (W_1, W_2). Megmutatjuk, hogy L_φ, mint nyelv felismerhető automatával (vagy ami ezzel ekvivalens: reguláris). A bizonyítást két lépésben adjuk meg.

b1) Először bebizonyítjuk, hogy az összes (W_1, W_2) struktúrákból álló nyelv felismerhető automatával. Legyen ez a nyelv K, azaz legyen

$$K = \{w \mid w \text{ egy } (W_1, W_2) \text{ struktúra } \}.$$

Ha bevezetjük a $\Delta = \Sigma \times 2^{W_1} \times 2^{W_2}$ jelölést, akkor nyilvánvalóan $K \subseteq \Delta^*$, ezért a K-t felismerő automata input szimbólumainak halmaza Δ lesz. Továbbá, Δ^* egy w eleme akkor fog K-ba tartozni, ha betűinek középső komponensei teljesítik az 1.32. definícióban előírt feltételeket. Az pedig, hogy w-nek megvan-e az 1.32. definícióban leírt tulajdonsága, könyen ellenőrizhető egy véges automatával. Valóban, legyen $M = (Q, \Delta, \delta, q_0, F)$, ahol

- $Q = 2^{W_1}$,
- $q_0 = \emptyset$,
- $F = \{W_1\}$,
- $\delta(S,(a,S_1,T_1)) = \begin{cases} S \cup S_1 & \text{ha } S \cap S_1 = \emptyset \\ \text{nincs értelmezeve} & \text{különben.} \end{cases}$

Nyilvánvaló, hogy $L(M) = K$, tehát K felismerhető.

b2) Megmutatjuk, hogy minden φ-re L_φ felismerhető. φ szerinti formulaindukcióval bizonyítunk.

- Ha $\varphi = Q_a(x)$, akkor $L_\varphi = K \cap \Delta^*\{(a,S,T) \mid x \in S, S \subseteq W_1, T \subseteq W_2\}\Delta^*$, tehát L_φ felismerhető, mivel felismerhető nyelvekből állítottuk elő reguláris műveletek alkalmazásával.
- Ha $\varphi = y = x+1$, akkor $L_\varphi = K \cap \Delta^*\ \{(a,S,T)(a',S',T') \mid x \in S,\ y \in S'\}\ \Delta^*$.
- Ha $\varphi = x \in X$, akkor $L_\varphi = K \cap \Delta^*\ \{(a,S,T) \mid x \in S,\ X \in T\}\ \Delta^*$.
- Ha $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, akkor $L_\varphi = K \cap L_{\varphi_1} \cap L_{\varphi_2}$.
- Ha $\varphi = \neg\, \varphi_1$, akkor $L_\varphi = K - L_{\varphi_1}$.
- Ha $\varphi = \exists x \varphi_1$, akkor állításunk a következőképpen látható be. Egy $w = (a_1,S_1,T_1)\ldots(a_i,S_i,T_i)\ldots(a_r,S_r,T_r)$ (W_1,W_2) struktúra esetén $w \models \varphi_1$ akkor és csak akkor teljesül, ha pontosan egy $1 \le i \le r$-re $x \in S_i$. Ezért $L_\varphi = h(L_{\varphi_1})$, ahol $h : \Delta^* \to \Delta^*$ a következő egyenlőséggel definiált betű-betű homomorfizmus:

$$h((a,S,T)) = \begin{cases} (a,S,T), \text{ ha } x \notin S \\ (a,S-\{x\},T), \text{ ha } x \in S \end{cases}$$

  (Itt kihasználjuk, hogy a reguláris nyelvek zártak a betű-betű homomorfizmusra.)

- Ha $\varphi = \exists X \varphi_1$, akkor az előző ponthoz hasonlóan kapjuk, hogy $L_\varphi = h(L_{\varphi_1})$, ahol h a következő egyenlőséggel definiált betű-betű homomorfizmus

$$h((a,S,T)) = \begin{cases} (a,S,T), \text{ ha } X \notin T \\ (a,S,T-\{X\}), \text{ ha } X \in T. \end{cases}$$

□

1.36. Következmény. L felismerhető $\iff$ definiálható egzisztenciális monadikus másodrendű formulával.

Bizonyítás.

"$\Rightarrow$" Az 1.35. tétel bizonyításának a) részében lényegében ezt bizonyítottuk, mivel az ott megkonstruált φ egzisztenciális formula.

"⇐" Ugyanezen tétel b) részében ennél többet bizonyítottunk, mert az állítást tetszőleges monadikus másodrendű formulára igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy ha az $y = x+1$ relációnál többet is megengedünk, akkor könnyen kiléphetünk a reguláris nyelvekből. Engedjük meg például a $\varrho(x,y,z) = (x+y=z)$ relációt és legyen $\Sigma = \{a,b\}$. Ekkor a $\psi(x) = \forall z(Last(z) \rightarrow \varrho(x,x,z))$ formulát egy w szó egy x pozíciója pontosan akkor elégíti ki, ha x értéke a szó hosszának a fele. Legyen $\chi = \exists x(\psi(x) \wedge \forall y((y \leq x) \rightarrow Q_a(y)) \wedge ((x<y) \rightarrow Q_b(y)))$. Akkor $L_\chi = \{a^n b^n |\ n \geq 0\}$, ami nem felismerhető nyelv!

1.6. Reguláris nyelvek jellemzései (összefoglalás)

Összefoglalásként felsoroljuk reguláris nyelvek osztályának az eddig megismert jellemzéseit.

1) nemdeterminisztikus automata

2) determinisztikus automata

3) determinisztikus és teljes automata

4) reguláris kifejezés

5) 3 típusú nyelvtan

6) 3 típusú nyelvtan $A \rightarrow aB$ és $A \rightarrow \varepsilon$ szabályokkal

7) véges indexű jobbkongruencia

8) ρ_L véges indexű

9) véges indexű kongruencia

10) θ_L véges indexű

11) $\exists M$ véges monoid, $B \subseteq M$, $\varphi :\ \Sigma^* \rightarrow M$ homomorfizmus, melyre $L = \varphi^{-1}(B)$

12) definiálható MSO(+1)-ben

13) definiálható MSO(+1)-ben egzisztenciális formulákkal

1.7. Szekvenciális gépek

Ebben a részben olyan automatákkal (szekvenciális gépekkel) fogunk foglalkozni, melyeket outputtal láttunk el, ily módon ezek egy $\varphi :\ \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ leképezést fognak megvalósítani. A szekvenciális gépek állapothalmaza nem lesz mindig véges. Amennyiben csak véges állapothalmazt engedünk meg, azt mindig kihangsúlyozzuk.

1.7.1. Mealy gépek, Moore gépek és az általuk indukált leképezések

1.37. Definíció. Mealy gépnek nevezünk egy $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ rendszer, ahol

- Q egy halmaz, az állapothalmaz,
- Σ és Δ az input és az output ábécék,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ az átmenetfüggvény,
- $\lambda : Q \times \Sigma \to \Delta$ a kimenet függvény.

Amennyiben Q véges, M-et véges Mealy gépnek nevezzük. □

Azt, hogy valamely $p, q \in Q$-ra, $a \in \Sigma$-ra és $b \in \Delta$-ra $\delta(q, a) = p$ és $\lambda(q, a) = b$, a következő ábrával szemléltetjük

$$q \xrightarrow{a/b} p,$$

míg M viselkedését egy $x = a_1 \ldots a_n$ input szón a következőképpen ábrázolhatjuk:

$$\underset{q_0}{\blacksquare} \xrightarrow{a_1/b_1} \underset{q_1}{\blacksquare} \;\cdots\; \underset{q_{n-1}}{\blacksquare} \xrightarrow{a_n/b_n} \underset{q_n}{\blacksquare}$$

1.38. Definíció. Moore gépnek nevezünk egy $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \mu)$ a rendszer, ahol

- Q, Σ, Δ ugyanaz, mint a Mealy gép esetén,
- $\mu : Q \to \Delta$ a jelfüggvény.

Amennyiben Q véges, M-et véges Moore gépnek nevezzük. □

Most M viselkedését egy $x = a_1 \ldots a_n$ input szón a következőképpen ábrázolhatjuk:

$$\begin{array}{ccccccc}
\underset{q_0}{\blacksquare} & \xrightarrow{a_1} & \underset{q_1}{\blacksquare} & \cdots & \underset{q_{n-1}}{\blacksquare} & \xrightarrow{a_n} & \underset{q_n}{\blacksquare} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mu(q_1) = b_1 & & \mu(q_{n-1}) = b_{n-1} & & \mu(q_n) = b_n
\end{array}$$

1.39. Definíció. Legyenek $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ és $M' = (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \lambda')$ Mealy gépek.

1) M' az M részgépe, ha teljesülnek a következő feltételek:

- $Q' \subseteq Q$,
- $\forall q \in Q',\ a \in \Sigma$ esetén

$$\delta'(q,a) = \delta(q,a) \qquad \text{(vagyis } Q' \text{ zárt } \delta\text{-ra)}$$
$$\lambda'(q,a) = \lambda(q,a).$$

2) Egy $\varphi: Q \to Q'$ leképezés homomorfizmus M-ből M'-be, ha $\forall q \in Q,\ a \in \Sigma$ esetén:

- $\varphi(\delta(q,a)) = \delta'(\varphi(q),a)$
- $\lambda(q,a) = \lambda'(\varphi(q),a)$

Ha φ ráképezés, akkor M' az M homomorf képe. Ha M' az M homomorf képe és φ még injektív is (tehát bijekció), akkor M és M' izomorfak, jele $M \cong M'$.

Ha φ homomorfizmus M-ből M'-be, akkor egy $x = a_1 \ldots a_n$ input szó hatására M és M' a következőképpen működnek:

$$\begin{tikzcd}
M & q_0 \arrow[r, "a_1/b_1"] \arrow[d] & q_1 \arrow[d] & \cdots & q_{n-1} \arrow[r, "a_n/b_n"] \arrow[d] & q_n \arrow[d] \\
M' & \varphi(q_0) \arrow[r, "a_1/b_1"] & \varphi(q_1) & \cdots & \varphi(q_{n-1}) \arrow[r, "a_n/b_n"] & \varphi(q_n)
\end{tikzcd}$$

3) Legyen $\rho \subseteq Q \times Q$ ekvivalenciareláció. ρ kongruencia az M-en, ha minden $p,q \in Q$ és $a \in \Sigma$ esetén:

- $p\,\rho\,q \Rightarrow \delta(p,a)\,\rho\,\delta(q,a)$
- $p\,\rho\,q \Rightarrow \lambda(p,a) = \lambda(q,a)$

4) Ha ρ kongruencia az M-en, akkor M-nek a ρ által meghatározott faktorgépe az $M_\rho = (Q/\rho, \Sigma, \Delta, \delta_\rho, \lambda_\rho)$ Mealy gép, ahol minden $q \in Q$ és $a \in \Sigma$ esetén:

- $\delta_\rho(q/\rho, a) = \delta(q,a)/\rho$
- $\lambda_\rho(q/\rho, a) = \lambda(q,a)$.

$\square$

A következő tételt bizonyítását csak vázlatosan közöljük.

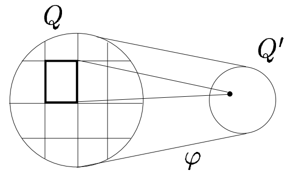
1.40. Tétel. *Legyen $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ egy Mealy gép, ρ pedig egy kongruencia-reláció M-en.*

1) M/ρ az M homomorf képe.

2) *Ha M' az M homomorf képe, akkor M-en van olyan ρ kongruencia, hogy $M/\rho \cong M'$.*

Bizonyítás. 1) A homomorfizmus $\varphi(q) = q/\rho$ lesz.

2) Ha $\varphi: Q \to Q'$ homomorfizmus, akkor $p\,\rho\,q \iff \varphi(p) = \varphi(q)$ kongruencia M-en és $\psi(q/\rho) = \varphi(q)$ izomorfizmus M/ρ és M' között.



□

A következőkben definiáljuk a Mealy és a Moore gépekkel indukálható Σ^*-ból Δ^*-ba történő leképezések fogalmát.

1.41. Definíció. 1) Legyen $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ egy Mealy gép és $q \in Q$ egy tetszőleges állapot. Az *M által q-ban indukát* $\lambda_q: \Sigma^* \to \Delta^*$ *leképezést* a következőképpen definiáljuk:

- $\lambda_q(\varepsilon) = \varepsilon$ (ε az üres szó)
- $\lambda_q(ax) = \lambda_q(x)\lambda(qx, a)$.

Ha például $x = a_1 \dots a_n$, akkor $\lambda_q(x)$-et a következőképpen szemléltetjük:

$$\underset{q=q_0}{\blacksquare} \xrightarrow{a_1/b_1} \underset{q_1}{\blacksquare} \quad \cdots \quad \underset{q_{n-1}}{\blacksquare} \xrightarrow{a_n/b_n} \underset{q_n}{\blacksquare}$$

Tehát $\lambda_q(x) = b_1 \dots b_n$. Továbbá, minden $x, y \in \Sigma^*$-ra $\lambda_q(xy) = \lambda_q(x)\lambda_{qx}(y)$. (Bizonyítás y hossza szerinti indukcióval.)

2) Legyen $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \mu)$ Moore gép és $q \in Q$ tetszőleges állapot. Az *M által q-ban indukát* $\mu_q: \Sigma^* \to \Delta^*$ *leképezést* pedig a következőképpen definiáljuk:

- $\mu_q(\varepsilon) = \varepsilon$
- $\mu_q(xa) = \mu_q(x)\mu(qxa)$.

Ha $x = a_1 \dots a_n$, akkor $\mu_q(x)$-et a következőképpen szemléltetjük:

$$\begin{array}{ccccccc}
\underset{q=q_0}{\blacksquare} & \xrightarrow{a_1} & \underset{q_1}{\blacksquare} & \cdots & \underset{q_{n-1}}{\blacksquare} & \xrightarrow{a_n} & \underset{q_n}{\blacksquare} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mu(q_1) = b_1 & & \mu(q_{n-1}) = b_{n-1} & & \mu(q_n) = b_n
\end{array}$$

Tehát $\mu_q(x) = b_1 \dots b_n$. Továbbá, minden $x, y \in \Sigma^*$-ra $\mu_q(xy) = \mu_q(x)\mu_{qx}(y)$.

□

1.7.2. Gépek ekvivalenciája

Ebben a fejezetben azt mutatjuk meg, hogy minden Mealy géphez van vele ekvivalens Moore gép.

1.42. Definíció. Legyenek $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ és $M' = (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \lambda')$ Mealy gépek.

1) M egy $p \in Q$ állapot ekvivalens M' egy $q \in Q'$ állapotával, jele $p \sim q$, ha $\lambda_p = \lambda'_q$.

2) M és M' ekvivalensek, ha bármelyiknek bármely p állapota ekvivalens a másik egy q állapotával.

(Mealy gép és Moore gép ekvivalenciája is definiálható.)

1.43. Lemma. A 1.42. Definícióban szereplő jelölésekkel élve, ha $p \sim q$, akkor minden $a \in \Sigma$ esetén $\delta(p, a) \sim \delta'(q, a)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $p \sim q$ és van olyan $a \in \Sigma$, melyre $\delta(p, a) \sim \delta'(q, a)$. Akkor valamely $x \in \Sigma^*$-ra $\lambda_{\delta(p,a)}(x) = y$, $\lambda'_{\delta'(q,a)}(x) = y'$ és $y \neq y'$ teljesül:

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r, "a/b"] & \delta(p,a) \arrow[r, squiggly, "x/y"] & r \\
q \arrow[r, "a/b"] & \delta'(q,a) \arrow[r, squiggly, "x/y'"] & r'
\end{tikzcd}$$

Ez ellentmondás, mert $by \neq by'$, tehát $p \not\sim q$. □

1.44. Tétel. *Legyenek $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ és $M' = (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \lambda')$ Mealy gépek és legyen M' az M egy homomorf képe. Akkor M és M' ekvivalensek.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi : Q \to Q'$ az M-nek egy homomorfizmusa M'-re. Megmutatjuk, hogy minden $q \in Q$ állapot ekvivalens $\varphi(q)$-val, azaz minden $x \in \Sigma^*$-ra $\lambda_q(x) = \lambda'_{\varphi(q)}(x)$. Legyen evégett $x = a_1 \dots a_n$ tetszőleges szó. Akkor:

$$\begin{tikzcd}
M & q = q_0 \arrow[r, "a_1/b_1"] \arrow[d] & q_1 \arrow[d] & \cdots & q_{n-1} \arrow[r, "a_n/b_n"] \arrow[d] & q_n \arrow[d] \\
M' & \varphi(q_0) \arrow[r, "a_1/b_1"] & \varphi(q_1) & \cdots & \varphi(q_{n-1}) \arrow[r, "a_n/b_n"] & \varphi(q_n)
\end{tikzcd}$$

tehát $\lambda_q(x) = b_1 \dots b_n$ és $\lambda_{\varphi(q)}(x) = b_1 \dots b_n$, azaz $q \sim \varphi(q)$. Másrészt M' minden $p \in Q'$ állapotához van olyan $q \in Q$, hogy $p = \varphi(q)$, tahát $p \sim q$. □

1.45. Következmény. Legyen $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ Mealy gép és ρ kongruencia M-en. Ekkor M és M/ρ ekvivalensek.

Bizonyítás. A 1.40. Tétel 1) része miatt M/ρ az M homomorf képe és így a 1.44. Tétel miatt M és M/ρ ekvivalensek. □

1.46. Tétel. *Minden $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ Mealy géphez van vele ekvivalens $N = (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \mu)$ Moore gép.*

Bizonyítás. Adjuk meg az N Moore gépet a következőképpen:

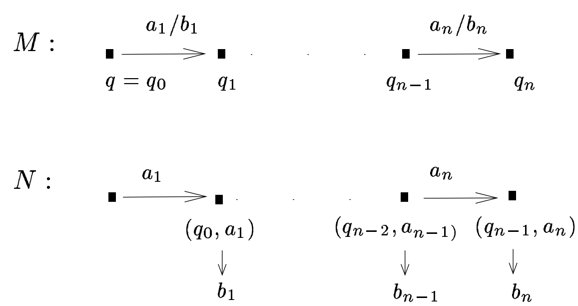
- $Q' = Q \cup Q \times \Sigma$,
- minden $q \in Q', a \in \Sigma$ esetén

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} (q, a) & \text{ha } q \in Q \\ (\delta(p, b), a) & \text{ha } q = (p, b) \end{cases}$$

- minden $q \in Q'$-ra

$$\mu(q) = \begin{cases} \text{tetszőleges } b \in \Delta & \text{ha } q \in Q \\ \lambda(p, b) & \text{ha } q = (p, b) \end{cases}$$

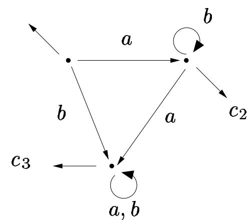
Megmutatjuk, hogy M valóban ekvivalens N-nel. Először megmutatjuk, hogy minden $q \in Q$ állapot ekvivalens q-val, mint Q'-beli állapottal. Valóban, tetszőleges $x = a_1 \dots a_n$ szó esetén $\lambda_q(x) = \mu_q(x)$, mint ahogy az alábbi ábra mutatja:



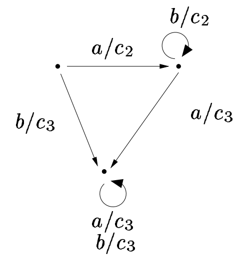
Legyen most $q \in Q'$.

- Ha $q \in Q$ is teljesül, akkor, mint már láttuk, $q \sim q$.
- Ha $q = (p, a)$, ahol $p \in Q$, akkor (p, a) megadható N-ben $\delta'(p, a)$ alakban, ahol $p \in Q$. Mivel $p \sim p$, az 1.43. Lemma miatt $\delta'(p, a) \in Q'$ ekvivalens lesz $\delta(p, a) \in Q$-val. □

Megjegyzés. Az is igaz, hogy Minden Mealy géphez van vele ekvivalens Moore gép. Valóban, egy $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \mu)$ Moore géphez hozzárendeljük az $M' = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ Mealy gépet, ahol $\lambda(q, a) = \mu(\delta(q, a))$.



M Moore-gép



M' Mealy-gép

Ekkor tetszőleges $q \in Q$ (mint M állapota) ekvivalens lesz $q \in Q'$-vel, (mint M' állapotával), tehát M és M' ekvivalensek.

1.7.3. Automata leképezések és véges automata leképezések

1.47. Definíció. Egy $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ leképezést *véges automata leképezésnek* nevezünk, ha van olyan véges $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ Mealy gép és $q \in Q$, hogy $\alpha = \lambda_q$, azaz $\forall x \in \Sigma^*$-ra $\alpha(x) = \lambda_q(x)$.

□

1.48. Definíció. $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ leképezést *automata leképezésnek* nevezünk, ha $\forall x, y \in \Sigma^*$-ra:

1) $|\alpha(x)| = |x|$ (α hossztartó)
2) $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha_x(y)$, ahol $\alpha_x : \Sigma^* \to \Delta^*$, α-tól és x-től függő leképezés (α prefixtartó).

□

Megjegyezzük, hogy 1) miatt $\alpha(\varepsilon) = \varepsilon$, tehát 2) miatt minden $x \in \Sigma^*$-ra $\alpha(x) = \alpha(\varepsilon x) = \alpha(\varepsilon)\alpha_\varepsilon(x) = \alpha_\varepsilon(x)$. Következésképpen $\alpha = \alpha_\varepsilon$.

1.49. Tétel. *Egy $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ leképezés akkor és csak akkor automata leképezés (tehát bír az 1) és 2) tulajdonságokkal), ha van olyan $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ (nem feltétlenül véges) Mealy gép és $q \in Q$ melyre $\alpha = \lambda_q$.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \lambda_q$, ahol $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ egy (nem feltétlenül véges) Mealy gép és $q \in Q$ egy állapot. Nyilvánvaló az, hogy λ_q hossztartó, lásd 1.41. definíció 1) rész. Másrészt, y hossza szerinti indukcióval igazolható, hogy minden $x, y \in \Sigma^*$-ra

$$\lambda_q(xy) = \lambda_q(x)\lambda_{qx}(y)$$

és így

$$\alpha(xy) = \lambda_q(xy) = \lambda_q(x)\lambda_{qx}(y) = \alpha(x)\alpha_x(y),$$

ahol $\alpha_x = \lambda_{qx}$, vagyis α prefixtartó is.

Megfordítva, legyen α egy automata leképezés. Először bebizonyítjuk a következőt.

<u>Állítás.</u> Minden $x, y, z \in \Sigma^*$-ra $|\alpha_x(y)| = |y|$ (tehát α_x is hossztartó) és $\alpha_x(yz) = \alpha_x(y)\alpha_{xy}(z)$ (tehát α_x is prefixtartó).

Az állítás bizonyítása. Az $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha_x(y)$ egyenletből kapjuk, hogy $|\alpha(xy)| = |\alpha(x)| + |\alpha_x(y)|$. Mivel α hossztartó, $|\alpha(xy)| = |xy| = |x| + |y|$ és $|\alpha(x)| = |x|$, tehát $|\alpha_x(y)| = |\alpha(y)| = |y|$.

Továbbá, a 2) tulajdonság miatt $\alpha(xyz) = \alpha(x)\alpha_x(yz)$. Másrészt, ugyancsak a 2) tulajdonság miatt $\alpha(xyz) = \alpha(xy)\alpha_{xy}(z) = \alpha(x)\alpha_x(y)\alpha_{xy}(z)$. Az egyenletek jobb oldalait egyenlővé téve, majd az $\alpha(x)$ szóval egyszerűsítve kapjuk, hogy $\alpha_x(yz) = \alpha_x(y)\alpha_{xy}(z)$. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Most megadjuk azt a (nem feltétlenül véges) Mealy gépet, mely egy alkalmas állapotában α-t indukálja. Legyen ez $M_\alpha = (Q_\alpha, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$, ahol

- $Q_\alpha = \{\alpha_x \mid x \in \Sigma^*\}$,
- minden $\alpha_x \in Q_\alpha$-ra és $a \in \Sigma$-ra $\delta(\alpha_x, a) = \alpha_{xa}$,
- minden $\alpha_x \in Q_\alpha$-ra és $a \in \Sigma$-ra $\lambda(\alpha_x, a) = \alpha_x(a)$.

Először is megjegyezzük, hogy δ valóban függvény, ugyanis, ha $\alpha_x = \alpha_y$, akkor minden $a \in \Sigma$-ra $\alpha_{xa} = \alpha_{ya}$. Valóban, a fenti állítás miatt, minden $z \in \Sigma^*$-re

$$\alpha_x(az) = \alpha_x(a)\alpha_{xa}(z) \quad \text{és} \quad \alpha_y(az) = \alpha_y(a)\alpha_{ya}(z).$$

Mivel $\alpha_x(a) = \alpha_y(a)$, kapjuk, hogy $\alpha_{xa}(z) = \alpha_{ya}(z)$.

Másodszor, megmutatjuk, hogy minden $x, y \in \Sigma^*$-ra $\lambda_{\alpha_x}(y) = \alpha_x(y)$. Ezt $|y|$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $y = \varepsilon$, akkor definíció szerint $\lambda_{\alpha_x}(\varepsilon) = \varepsilon$ és, mivel α_x hossztartó, $\alpha_x(\varepsilon) = \varepsilon$. Az indukciós lépés:

$$\begin{aligned}
& \lambda_{\alpha_x}(ya) \\
= \; & \lambda_{\alpha_x}(y)\lambda(\alpha_{xy}, a) \\
= \; & \alpha_x(y)\lambda(\alpha_{xy}, a) \\
& \text{(indukciós feltevés)} \\
= \; & \alpha_x(y)\alpha_{xy}(a) \\
& (\lambda \text{ definíciója}) \\
= \; & \alpha_x(ya) \\
& \text{(az állítás miatt)}
\end{aligned}$$

Tehát $\lambda_{\alpha_\varepsilon}(x) = \alpha_\varepsilon(x) = \alpha(x)$, vagyis M_α az α_ε állapotban α-t indukálja. □

1.50. Következmény. Minden véges automata leképezés egyben automata leképezés is.

Bizonyítás. Azonnal adódik a 1.49. tételből. □

Most azzal foglalkozunk, hogy egy automata leképezés mely feltételek mellett lesz egyben véges automata leképezés is.

1.51. Tétel. *Tetszőleges $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ leképezésre, a következő két állítás ekvivalens.*

(1) α véges automata leképezés.

(2) α automata leképezés és az $\{\alpha_x \mid x \in \Sigma^*\}$ halmaz véges.

Bizonyítás. *1. lépés:* (1) $\Rightarrow$ (2). A 1.50. következmény szerint α automata leképezés is.

Annak bizonyítására, hogy a $\{\alpha_x \mid x \in \Sigma^*\}$ halmaz véges, tegyük fel, hogy az $M' = (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \lambda')$ véges Mealy gép $q \in Q'$ állapotára teljesül, hogy $\alpha = \lambda'_q$ (és így minden $x \in \Sigma^*$-ra $\alpha_x = \lambda'_{qx}$). Az általánosság megszorítása nélkül azt is feltehetjük, hogy M' q-ra nézve összefüggő, vagyis $Q' = \{qx \mid x \in \Sigma^*\}$.

Másrészt, a 1.49. tételben szereplő $M_\alpha = (Q_\alpha, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ Mealy gép is α-t indukálja az α_ε állapotban.

Megmutatjuk, M_α az M' homomorf képe. Legyen $\varphi : Q' \to Q_\alpha$ azon leképezés, melyre minden $x \in \Sigma^*$-ra $\varphi(qx) = \alpha_x$.

Ez a leképezés függvény, hiszen, ha $qx = qy$, akkor $\lambda'_{qx} = \lambda'_{qy}$ és így $\alpha_x = \alpha_y$.

Nyilvánvaló, hogy φ szürjektív. Továbbá, minden $a \in \Sigma$-ra

$$\varphi(\delta'(qx, a)) = \varphi(qxa) = \alpha_{xa} = \delta(\alpha_x, a) = \delta(\varphi(qx), a)$$

és

$$\lambda'(qx, a) = \lambda'_{qx}(a) = \alpha_x(a) = \lambda(\alpha_x, a) = \lambda(\varphi(qx), a).$$

Tehát M_α az M_1 homomorf képe, ezért M_α is véges.

2. lépés: (2) $\Rightarrow$ (1). Vegyük az 1.49. tételben szereplő M_α Mealy gépet. Mint láttuk, M_α az α_ε állapotában α-t indukálja. Másrészt, feltételünk szerint, Q_α véges, tehát α automata leképezés.

□

A következőkben egy másik feltételt is adunk arra, hogy egy automata leképezés mikor lesz egyben véges automata leképezés is.

Jelölés: Legyen $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ automata leképezés:

- $x \in \Sigma^*$-ra $\overline{\alpha(x)}$ az $\alpha(x)$ utolsó betűje. ($\overline{\alpha(x)} \in \Delta$)
- $b \in \Delta$-ra $L_b = \{x \in \Sigma^* \mid \overline{\alpha(x)} = b\}$.

(Megjegyezzük, hogy $\bigcup_{b \in \Delta} L_b = \Sigma^*$.)

1.52. Tétel. *Legyen $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ egy leképezés. A következő két állítás ekvivalens.*

1) α véges automata leképezés

2) α automata leképezés és $\forall b \in \Delta$-ra L_b felismerhető.

Bizonyítás. <u>1) $\Rightarrow$ 2)</u>: Mint már láttuk, ha α véges automata leképezés, akkor automata leképezés is.

A 1.46. tétel miatt feltehetjük fel, hogy van egy olyan $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \mu)$ Moore-gép és $q_0 \in Q$, melyre $\alpha = \mu_{q_0}$. Definiáljuk minden $b \in \Delta$-ra az $N_b = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F_b)$ automatát, ahol $F_b = \{q \in Q \mid \mu(q) = b\}$. Tehát N_b olyan Σ^*-beli szavakat ismer fel, amelyekre M outputjának utolsó betűje b. Így $L(N_b) = L_b$, vagyis L_b felismerhető:

$$M: \quad \begin{tikzcd} q_0 \arrow[r, "a_1"] & q_1 \arrow[d] & \cdots & q_{n-1} \arrow[r, "a_n"] \arrow[d] & q_n \arrow[d] & \in F_b \arrow[d, Leftrightarrow] \\ & \mu(q_1) = b_1 & & \mu(q_{n-1}) = b_{n-1} & \mu(q_n) = b_n = b & \end{tikzcd}$$

2) $\Rightarrow$ 1): Erre két bizonyítást is adunk.

1. bizonyítás: $\forall b \in \Delta$-ra legyen ρ_b egy véges indexű jobbkongruencia, ami szaturálja L_b-t (a 1.5. Tétel miatt van ilyen és legyen $\rho = \bigcap_{b\in\Delta} \rho_b$. Mivel valamennyi ρ_b véges indexű jobbkongruencia, ρ is is az lesz és $\forall b$-re $\rho \subseteq \rho_b$. Legyen $M = (\Sigma^*/\rho, \Sigma, \Delta, \delta, \mu)$ Moore-gép, melyre minden $x \in \Sigma^*$ és $a \in \Sigma$ esetén:

- $\delta(x/\rho, a) = xa/\rho$
- $\mu(x/\rho) = \begin{cases} \text{tetszőleges, ha } x \in \varepsilon/\rho \\ \overline{\alpha(x)} \text{ különben.} \end{cases}$

(Megjegyezzük, hogy M állapotai x/ρ alakúak, ahol $x \in \Sigma^*$.)

Az, hogy δ jóldefiniált, abból következik, hogy ρ jobbkongruencia. Ugyanakkor, μ is jóldefiniált, ami a következőképpen látható be. Ha $x/\rho = y/\rho$, akkor minden $b \in \Delta$-ra $x/\rho_b = y/\rho_b$. Továbbá, mivel $\bigcup_{b\in\Delta} L_b = \Sigma^*$, van olyan $b \in \Delta$, hogy az x/ρ osztály részt vesz az L_b nyelv előállításában. Ezért $\overline{\alpha(x)} = \overline{\alpha(y)} = b$.

Az automatákhoz hasonlóan, δ kiterjesztésére most is igaz, hogy minden $x, y \in \Sigma^*$ esetén: $\delta^*(x/\rho, y) = xy/\rho$.

Állítjuk, hogy $\forall x$-re $\alpha(x) = \mu_{\epsilon/\rho}(x)$. Valóban:

(i) Ha $x = \varepsilon$, akkor $\alpha(x) = \varepsilon$ $\quad$ ($\mid \alpha(x) \mid = \mid x \mid$ miatt) és

$\mu_{\varepsilon/\rho}(\varepsilon) = \varepsilon$ $\quad$ (a Moore-gép által indukált leképezés definíciója szerint).

(ii) Ha $x = x'a$, akkor:

$$\begin{aligned} \mu_{\varepsilon/\rho}(x'a) &= \mu_{\varepsilon/\rho}(x')\mu(x'a/\rho) & \\ &= \alpha(x')\mu(x/\rho) & \text{(indukciós feltevés)} \\ &= \alpha(x')\overline{\alpha(x)} & (\mu \text{ definíció}) \\ &= \alpha(x) & (\text{mert } \alpha \text{ automata leképezés}). \end{aligned}$$

2. bizonyítás: Legyen $\Delta = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Tegyük fel, hogy az L_{b_i} $(1 \le i \le n)$ nyelv felismerhető az $M_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i)$ automatával. Legyen $N = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \mu)$ Moore-gép, ahol

- $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n = \{(p_1, \ldots, p_n) \mid p_i \in Q_i,\ 1 \le i \le n\}$
- Minden $(p_1, \ldots, p_n) \in Q$-ra és $a \in \Sigma$-ra $\delta((p_1, \ldots, p_n), a) = (\delta_1(p_1, a), \ldots, \delta_n(p_n, a))$.
- $\mu((p_1, \ldots, p_n)) = \begin{cases} b_i \text{ ha } \exists 1 \le i \le n : p_i \in F_i \text{ és } \forall\ 1 \le j \le n, \text{ ha } \ i \ne j \text{ akkor } p_j \notin F_j \\ \text{tetszőleges különben.} \end{cases}$

A δ átmenetfüggvény tulajdonsága lesz, hogy minden $(p_1,\ldots,p_n) \in Q$-ra és $x \in \Sigma^*$-ra $\delta^*((p_1,\ldots,p_n),x) = (\delta_1(p_1,x),\ldots,\delta_n(p_n,x))$, vagy másik jelöléssel: $(p_1,\ldots,p_n)x_N = (p_1x_{M_1},\ldots,p_nx_{M_n})$.
Állítjuk, hogy minden $x \in \Sigma^*$-re $\alpha(x) = \mu_{(q_1,\ldots,q_n)}(x)$. Valóban:

(i) Ha $x = \varepsilon$, akkor : $\alpha(x) = \epsilon$ $\quad$ ($\mid \alpha(x) \mid = \mid x \mid$ miatt)

$\mu_{(q_1,\ldots,q_n)}(\varepsilon) = \varepsilon.$ $\quad$ (a Moore-gép által indukált leképezés definíciója szerint).

(ii) Ha $x = x'a$, akkor:

$$\begin{aligned}
\mu_{(q_1,\ldots,q_n)}(x'a) &= \mu_{(q_1,\ldots,q_n)}(x')\mu(q_1x'a_{M_1},\ldots,q_nx'a_{M_n}) \\
&= \alpha(x')\mu(q_1x_{M_1},\ldots,q_nx_{M_n}) && \text{(indukciós feltevés)} \\
&= \alpha(x')\overline{\alpha(x)} && (\mu \text{ definíciója}) \\
&= \alpha(x) && \text{(mert } \alpha \text{ automata leképezés).}
\end{aligned}$$

□

1.7.4. Gépek minimalizálása

Ebben a fejezetben megadjuk egy $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ véges automata leképezést kiszámító minimális Mealy gép kiszámításának algoritmusát.

1.53. Definíció. Legyen $M = (Q,\Sigma,\Delta,\delta,\lambda)$ egy Mealy gép, $\rho_M \subseteq Q \times Q$ pedig a következő reláció. Minden $p,q \in Q$-ra:

$$p\ \rho_M\ q \iff \lambda_p = \lambda_q (\iff p \sim q).$$

1.54. Észrevétel. Minden $M = (Q,\Sigma,\Delta,\delta,\lambda)$ Mealy gép esetén ρ_M kongruencia M-en.

Bizonyítás. Az, hogy ρ_M ekvivalenciareláció, könnyen belátható. Továbbá minden $p,q \in Q$-ra:

- $p\ \rho_M\ q \Rightarrow \delta(p,a)\ \rho_M\ \delta(q,a)$, mert ezek is ekvivalensek (lásd 1.43. Lemma).
- $p\ \rho_M\ q \Rightarrow \lambda(p,a) = \lambda(q,a)$, mert $\lambda(p,a) = \lambda_p(a)$ és $\lambda(q,a) = \lambda_q(a)$. □

1.55. Következmény. M és M/ρ_M gépek ekvivalensek.

Bizonyítás. 1.54. Észrevétel és 1.45. Következmény. □

M/ρ_M-et az M-hez tartozó redukált gépnek nevezzük. Továbbá, azt mondjuk, hogy M redukált, ha $M \cong M/\rho_M$.

1.56. Tétel. *Az $M = (Q,\Sigma,\Delta,\delta,\lambda)$ és $N = (P,\Sigma,\Delta,\delta',\lambda')$ Mealy gépek akkor és csak akkor ekvivalensek, ha $M/\rho_M \cong N/\rho_N$.*

Bizonyítás. "$\Leftarrow$" irány: Az M ekvivalens M/ρ_M-mel, $M/\rho_M \cong N/\rho_N$, és az N/ρ_N ekvivalens N-nel összefüggésekből azonnal adódik, hogy M ekvivalens N-nel.

"$\Rightarrow$" irány: Először megállapítjuk, hogy M/ρ_M ekvivalens N/ρ_N-nel, mert: M/ρ_M ekvivalens M-mel, M ekvivalens N-nel és N ekvivalens N/ρ_N-nel.

Az $M/\rho_M = (Q/\rho_M, \Sigma, \Delta, \delta_{\rho_M}, \lambda_{\rho_M})$ és $N/\rho_N = (P/\rho_N, \Sigma, \Delta, \delta'_{\rho_N}, \lambda'_{\rho_N})$ jelölésekkel élve, definiáljuk a $\varphi : Q/\rho_M \to P/\rho_N$ leképezést a következőképpen: $\varphi(q/\rho_M) = p/\rho_N$, ha q/ρ_M és p/ρ_N ekvivalensek. Egyrészt megmutatjuk, hogy φ izomorfizmus. Valóban:

- φ ráképezés, mert M és N ekvivalensek és
- φ injektív, mert M/ρ_M redukált (az ekvivalens állapotok már össze vannak vonva),

tehát φ bijekció. Másrészt a φ homomorfizmus. Valóban:

1) $\varphi(\delta_{\rho_M}(q/\rho_M, a)) = \delta'_{\rho_N}(\varphi(q/\rho_M), a)$

   Legyen ugyanis $p/\rho_N = \varphi(q/\rho_M)$. Ekkor q/ρ_M és p/ρ_N ekvivalensek, tehát az 1.43. Lemma miatt $\delta_{\rho_M}(q/\rho_M, a)$ és $\delta'_{\rho_N}(p/\rho_N, a)$ is ekvivalensek. Következésképpen:

$$\varphi(\delta_{\rho_M}(q/\rho_M, a)) = \delta'_{\rho_N}(p/\rho_N, a) = \delta'_{\rho_N}(\varphi(q/\rho_M), a).$$

2) $\lambda_{\rho_M}(q/\rho_M, a) = \lambda'_{\rho_N}(\varphi(q/\rho_M), a)$

   Ugyanis q/ρ_M és $\varphi(q/\rho_M)$ ekvivalensek, így bármely szóra - az 1 hosszú a szóra is - ugyanazt a kimenetet adják.

Tehát $M/\rho_M \cong N/\rho_N$. □

1.57. Tétel. *Teteszőleges M Mealy gép esetén legyen $K_M = \{N \mid M \text{ és } N \text{ ekvivalensek}\}$. Akkor K_M-ben van olyan izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott gép, amely bármely $N \in K_M$-nek homomorf képe.*

Bizonyítás. Például M/ρ_M megfelelő. Legyen $N \in K_M$, akkor a 1.56. Tétel szerint $M/\rho_M \cong N/\rho_N$, ami a 1.40. Tétel miatt homomorf képe N-nek. □

A következő tétel bizonyítását gyakorlatnak szánjuk.

1.58. Tétel. *Minden M vges Mealy gép esetén ρ_M algoritmikusan kiszámítható.*

Bizonyítás. Legyen $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$. ρ_M-et a következő $\rho_1, \rho_2, \ldots$ sorozattal közelítjük.

(i) Legyen $i = 1$ és számítsuk ki ρ_1-et a következő összefüggés alapján : $\forall p, q \in Q$ esetén $p\ \rho_1\ q \iff \forall a \in \Sigma :\ \lambda(p, a) = \lambda(q, a)$

(ii) Számítsuk ki ρ_{i+1}-et : $\forall p, q \in Q$ esetén $p\ \rho_{i+1}\ q \iff p\ \rho_i\ q$ és $\forall a \in \Sigma$: $\delta(p, a)\ \rho_i\ \delta(q, a)$

(iii) Ha $\rho_i = \rho_{i+1}$, akkor állj, különben legyen $i = i + 1$ és menjünk (i)-re.

Ekkor $\rho_1 \supseteq \rho_2 \supseteq \ldots \supseteq \rho_i \supseteq \ldots$" = ", tehát $\exists i: \ \rho_i = \rho_{i+1} = \rho_{i+2} \ldots$. Erre az i-re $\rho_M = \rho_i$. A bizonyítást a 1.25. lemma bizonyításához hasonlóan végezhetjük el. □

Az eddigieket összefoglalva, megadjuk egy $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ véges automata leképezést kiszámító minimális Mealy gép kiszámításának algoritmusát.

1.59. Tétel. *Legyen $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ véges automata leképezés és $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ egy olyan véges Mealy gép, melynek egy $q_0 \in Q$ állapotára $\lambda_{q_0} = \alpha$.*

1) *Számoljuk ki M q_0-összefüggő részét. Legyen ez $M' = (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \lambda')$, ahol $Q' = \{q_0 x_M \mid x \in \Sigma^*\}$ a $(Q, \Sigma, \delta, q_0, Q)$ automatában a q_0-ból elérhető állapotok halmaza (1.21. definíció), δ' és λ' pedig δ és λ megszorításai $Q' \times \Sigma$-ra.*

2) *Számoljuk ki $\rho_{M'}$-t (1.58. tétel) és határozzuk meg az $M'/\rho_{M'} = (Q'/\rho_{M'}, \Sigma, \Delta, \delta'_{\rho_{M'}}, \lambda'_{\rho_{M'}})$ gépet.*

Ekkor $M'/\rho_{M'}$ az α-t indukáló minimális állapotszámú Mealy gép.

Bizonyítás. Az 1.44. tétel miatt $(\lambda'_{\rho_{M'}})_{q_0/\rho_{M'}} = \lambda'_{q_0}$, továbbá nyilvánvalóan $\lambda'_{q_0} = \lambda_{q_0} = \alpha$, tehát $M'/\rho_{M'}$ valóban α-t indukálja.

Megmutatjuk, hogy $M'/\rho_{M'}$ minimális állapotszámú. Legyen evégett $N = (P, \Sigma, \Delta, \delta_1, \lambda_1)$ egy olyan összefüggő Mealy gép, melynek egy $p_0 \in P$ állapotára $(\lambda_1)_{p_0} = \alpha$. Akkor M' és N ekvivalensek, mert $q_0 \sim p_0$ és minden $x \in \Sigma^*$-ra $q_0 x_M \sim p_0 x_N$. A 1.56. tételt alkalmazva kapjuk, hogy $M'/\rho_{M'} \cong N/\rho_N$. Az 1.40. tétel szerint N/ρ_N az N homomorf képe, így $M'/\rho_{M'}$ is az N homomorf képe. Mivel N tetszőleges volt, $M'/\rho_{M'}$ minimális állapotszámú. □

2. Környezetfügetlen nyelvek

2.1. Környezetfügetlen nyelvtanok átalakítása

Gyakran szükség van arra, hogy egy környezetfüggetlen nyelvtanon olyan átalakításokat hajtsunk végre, melyek nem változtatják meg a nyelvtan által generált nyelvet. Ebben a részben néhány ilyen nevezetes átalakítást ismertetünk.

2.1.1. Láncszabály mentesítés

2.1. Definíció. Tetszőleges $G = (N, \Sigma, P, S)$ nyelvtan esetén az $A \to B$ alakú szabályokat *láncszabályoknak* nevezzük. Továbbá, amennyiben P-ben nincsenek láncszabályok, úgy azt mondjuk, hogy G *láncszabálymentes.* □

2.2. Lemma. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan. Megadható olyan $G' = (N, \Sigma, P', S)$ láncszabálymentes környezetfüggetlen nyelvtan, amelyre $L(G') = L(G)$. Amennyiben G 3 típusú, úgy G' is 3 típusú lesz.

Bizonyítás. Először minden $A \in N$-re meghatározzuk azon $B \in N$ nemterminálisok halmazát, melyekre $A \Rightarrow^* B$ úgy, hogy a levezetés közben csak láncszabályokat alkalmaztunk. Jelöljük ezt a halmazt N_A-val. Megjegyezzük, hogy $A \in N_A$ (mivel $A \Rightarrow^* A$ nulla számú láncszabállyal.) Az N_A halmaz kiszámítását a következő iterációval végezzük:

(i) Legyen $N_0 = \{A\}$ (mert $A \in N_A$) és legyen $i = 0$.

(ii) Legyen $N_{i+1} = N_i \cup \{C \in N \mid \exists B \in N_i$ úgy, hogy $B \to C \in P\}$.

(iii) Amennyiben $N_i = N_{i+1}$ legyen $N_A = N_i$, különben legyen $i = i + 1$ és ismételjük meg a (ii) pontot.

Az olvasóra bízzuk annak igazolását, hogy a fenti algoritmus valóban N_A-t határozza meg.

Most konstruáljuk meg P'-t a következőképpen:

$P' = \emptyset$;
Minden $A \in N$-re,
  minden $B \in N_A$-ra,
    minden $B \to \alpha \in P$ szabály esetén:
      Ha $B \to \alpha$ nem láncszabály akkor
      vegyük fel az $A \to \alpha$ szabályt P'-be;

Nyilvánvaló, hogy P'-ben nem lesznek láncszabályok, ugyanakkor P' tartalmazni fog minden olyan P-beli szabályt ami nem láncszabály. Az is nyilvánvaló, hogy ha G 3 típusú akkor G' is az lesz. Továbbá, az is teljesülni fog, hogy $L(G') = L(G)$, ez utóbbi a következők miatt.

Minden olyan G-beli levezetésben, ami S-ből indul ki és terminális szóban végződik, alkalmazhatunk láncszabályokat. Ilyenkor egy A nemterminálisból indulunk ki, alkalmazunk valamennyi láncszabályt, amelyekkel elérünk egy B nemterminálist, majd alkalmazunk egy $B \to \alpha$ szabályt, ami nem láncszabály. (Ez utóbbi lépés szükségszerűen bekövetkezik, mert különben nem érhetnénk el a terminális szót.) Ekkor azonban teljesül, hogy $B \in N_A$ és, hogy $B \to \alpha \in P$, tehát az $A \to \alpha$ szabály P'-ben van. Következésképpen A-ból levezethető α G'-ben egyetlen lépésben. Ilyen módon a G-beli, S-ből induló és terminális szóban végződő levezetésekben alkalmazott láncszabályok elhagyhatók, és a levezetés megkapható P'-beli szabályokkal is.

Megfordítva, minden G'-beli levezetésben alkalmazott szabály vagy P-ben is benne van, vagy helyettesíthető P-beli láncszabályok sorozatának és egy nem láncszabálynak az alkalmazásával. $\square$

A lemmában szereplő konstrukciót egy 3 típusú nyelvtanon mutatjuk be.

2.3. Példa. Legyen G az a 3 típusú nyelvtan amelynek szabályai a következők:

- $S \to A \,|\, ab$
- $A \to B \,|\, bA$
- $B \to bB \,|\, C \,|\, a$
- $C \to bb.$

Az N_S, N_A, N_B és N_C halmazokat kiszámolva, kapjuk, hogy: $N_S = \{S, A, B, C\}$, $N_A = \{A, B, C\}$, $N_B = \{B, C\}$ és $N_C = \{C\}$. Ezután kapjuk, hogy G' szabályai a következők lesznek:

- $S \to ab \,|\, bA \,|\, bB \,|\, a \,|\, bb$
- $A \to bA \,|\, bB \,|\, a \,|\, bb$
- $B \to bB \,|\, bb \,|\, a$
- $C \to bb.$

$\square$

2.1.2. ε-mentesítés

2.4. Definíció. Egy $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan *ε-mentes*, ha P nem tartalmaz $A \to \varepsilon$ alakú szabályokat, kivéve esetleg az $S \to \varepsilon$ szabályt. Ha azonban $S \to \varepsilon \in P$, akkor S nem szerepel semelyik P-beli szabály jobb oldalán. $\square$

Minden környezetfüggetlen nyelvtan ε-mentes alakra hozható, pontosabban igaz a következő állítás.

2.5. Lemma. Tetszőleges $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtanhoz megkonstruálható olyan ε-mentes $G' = (N', \Sigma, P', S')$ környezetfüggetlen nyelvtan, melyre $L(G) = L(G')$.

Bizonyítás. Legyen tehát $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy tetszőleges környezetfüggetlen nyelvtan. A lemmát két lépésben bizonyítjuk be.

a) Először megadunk egy olyan ε-mentes $G_1 = (N, \Sigma, P_1, S)$ nyelvtant, melyre $L(G_1) = (L(G) - \{\varepsilon\})$. Ehhez meghatározzuk azon nemterminálisok H halmazát, melyekből levezethető ε. H a következő iterációval határozható meg. Legyen

(i) Legyen $H_1 = \{A \in N \mid A \to \varepsilon \in P\}$ és $i = 1$.

(ii) Legyen $H_{i+1} = H_i \cup \{A \in N \mid (\exists A \to \alpha \in P)$ úgy, hogy $\alpha \in H_i^*\}$.

(iii) Ha $H_{i+1} = H_i$, akkor álljunk meg, különben legyen $i = i + 1$ és hajtsuk végre az (ii) lépést.

Könnyen igazolható, hogy minden $A \in N$-re, akkor és csakis akkor teljesül $A \Rightarrow_G^* \varepsilon$, ha van olyan i, hogy $A \in H_i$. (Nevezetesen az elegendőség i szerinti indukcióval bizonyítható, a szükségesség pedig az $A \Rightarrow_G^* \varepsilon$ levezetés lépéseinek száma szerinti indukcióval.) Továbbá az iterációs algoritmus terminál, mivel $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots N$, ezért van olyan i_0, hogy $H_{i_0} = H_{i_0+1}$. Az is könnyen látható, hogy ezen i_0-ra $H_{i_0+1} = H_{i_0+2} = \ldots$. Az eddig elmondottakból következik, hogy $A \in H_{i_0}$, akkor és csakis akkor teljesül, ha $A \Rightarrow^* \varepsilon$, tehát a $H = H_{i_0}$ választás megfelelő lesz. (Mellesleg $\varepsilon \in L(G)$ akkor és csak akkor, ha $S \in H$.)

Most megadjuk G_1-et, amihez definiáljuk P_1 szabályhalmazt a következőképpen. Legyen P_1 a legszűkebb olyan halmaz, melyre teljesül, hogy

- minden olyan $A \to \alpha \in P$ szabály esetén melyre $\alpha \neq \varepsilon$,
- minden olyan $A \to \alpha_1$ szabály P_1-ben van, melyre $\alpha_1 \neq \varepsilon$ és α_1 úgy keletkezik α-ból, hogy töröljük belőle H-beli nemterminálisok 0 vagy több előfordulását.

(Például, ha $A, B \in H$ és az $A \to aCBbAB$ szabály P-beli, akkor az $A \to aCBbAB$, $A \to aCbAB$, $A \to aCBbB$, $A \to aCBbA$, $A \to aCbB$, $A \to aCbA$, $A \to aCBb$ és $A \to aCb$ szabályok mindegyike P_1-ben lesz. Ugyanakkor, ha $C \to AB$ is P-ben van, akkor a $C \to A$ és a $C \to B$ szabályok is P_1-be kerülnek, de $C \to \varepsilon$ már nem.)

Végül legyen $G_1 = (N, \Sigma, P_1, S)$. Nyilvánvaló az, hogy G_1 ε-mentes lesz, hiszen az $\alpha_1 \neq \varepsilon$ feltétel miatt egyetlen ε-szabályt sem vettünk fel P_1-be. Ugyanakkor az

$$L(G_1) = (L(G) - \{\varepsilon\})$$

feltétel is teljesül, ami a következőképpen látható be.

Egyrészt $L(G_1) \subseteq (L(G) - \{\varepsilon\})$, mivel ha veszünk egy G_1-beli levezetést, akkor abban minden olyan $A \to \alpha_1$, P_1-beli szabály alkalmazása, amely nincs P-ben, helyettesíthető azon $A \to \alpha$, P-beli szabállyal amelyből $A \to \alpha_1$ keletkezett és azon nemterminálisok ε-ra történő levezetésével, amelyeket α-ból elhagytunk.

A fordított irányú $(L(G) - \{\varepsilon\}) \subseteq L(G_1)$ tartalmazás pedig azért igaz, mert ha alkalmazunk egy $A \to \alpha$ P-beli szabályt, majd α-ból egy ε-tól különböző szót vezetünk le úgy, hogy ugyanakkor az α-ban szereplő 0 vagy több nemterminálisból ε-t vezetünk le, akkor $A \to \alpha$ alkalmazása helyettes´thető egy olyan $A \to \alpha_1$ P_1-beli szabály alkalmazásával, melyet $A \to \alpha$-ból kaptunk.

b) Most második lépésként, a G_1 ismeretében megadjuk a lemmában szereplő G'-t a következőképpen. Ha $\varepsilon \notin L(G)$ (vagyis, ha $S \notin H$), akkor legyen $G' = G_1$, különben pedig legyen $G' = (N \cup \{S'\}, \Sigma, P_1 \cup \{S' \to S, S' \to \varepsilon\}, S')$. Nyilvánvaló, hogy mindkét esetben G' is ε-mentes, és $L(G') = L(G)$. □

2.6. Példa. Legyen G az alábbi nyelvtan:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & ABC \\ A & \rightarrow & BB \,|\, \varepsilon \\ B & \rightarrow & CC \,|\, a \\ C & \rightarrow & AA \,|\, b. \end{array}$$

Adjuk meg a G-vel ekvivalens ε-mentes nyelvtant!

Az 2.5. Lemmában leírt módon először meghatározzuk azon nemterminálisok H halmazát, amelyekből levezethető ε. Kapjuk, hogy $H_1 = \{A\}$, $H_2 = \{A, C\}$, $H_3 = \{A, C, B\}$, $H_4 = \{S, A, C, B\}$ és $H_5 = \{S, A, C, B\}$, tehát $H = \{S, A, C, B\}$. Mellesleg $\varepsilon \in L(G)$, mivel $S \in H$.

A következő lépésben megkonstruáljuk G_1-et:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & ABC \,|\, AB \,|\, BC \,|\, AC \,|A \,|\, B \,|\, C \\ A & \rightarrow & BB \,|\, B \\ B & \rightarrow & CC \,|\, C \,|\, a \\ C & \rightarrow & AA \,|\, A \,|\, b. \end{array}$$

Ezen G_1-re $L(G_1) = (L(G) - \{\varepsilon\})$. A G-vel ekvivalens G' ε-mentes nyelvtant úgy kapjuk, hogy G_1 szabályaihoz hozzávesszük még az $S' \rightarrow S$ és $S' \rightarrow \varepsilon$ szabályokat, ahol S' lesz az új kezdőszimbólum. □

2.1.3. A felesleges szimbólumok elhagyása

A környezetfüggetlen nyelvtan definíciója megenged olyan redundáns eseteket is, melyeket a gyakorlatban célszerű elkerülni. Például tekintsük azt a nyelvtant, melynek szabályai $S \rightarrow a|aB$, $A \rightarrow b$ és $B \rightarrow Bc$. Nyilvánvaló, hogy ez a nyelvtan ekvivalens az egyetlen $S \rightarrow a$ szabályt tartalmazó nyelvtannal, mivel az $S \rightarrow aB$, $A \rightarrow b$ és a $B \rightarrow Bc$ szabályok nem alkalmazhatók egyetlen olyan levezetésben sem, amelyik S-ből indul ki és egy terminális szóban végződik. Az $A \rightarrow b$ szabály esetén ennek az az oka, hogy az A nemterminális "nem érhető el" S-ből kiinduló levezetéssel, míg az $S \rightarrow aB$ és a $B \rightarrow Bc$ szabályok azért nem alkalmazhatóak, mert (habár B elérhető S-ből) B-ből nem vezethető le egyetlen terminális szó sem. Ebben a részben az ilyen "rossz" tulajdonságokkal rendelkező szimbólumok felderítésére és kiszűrésére alkalmas algoritmusokat adunk meg.

2.7. Definíció. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan. Az $X \in (N \cup \Sigma)$ szimbólumról azt mondjuk, hogy *használható*, ha vannak olyan $x, y, z \in \Sigma^*$ szavak, amelyekre $S \Rightarrow^* xXz \Rightarrow^* xyz$. (Megjegyezzük, hogy ha $X \in \Sigma$, akkor $X = y$.)

□

Célunk egy olyan algoritmus megadása amellyel környezetfüggetlen nyelvtanokból ki tudjuk szűrni a nem használható (vagy felesleges) szimbólumokat és ezáltal minden környezetfüggetlen nyelvtanhoz meg tudunk adni egy vele ekvivalens, és csak használható szimbólumokat tartalmazó nyelvtant. Ezt két lépésben érjük el, először az ún. nem termináló nemterminálisokat szűrjük ki.

2.8. Definíció. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan. Az $A \in N$ nemterminálisról azt mondjuk, hogy *termináló*, ha van olyan $z \in \Sigma^*$ szó, amelyre $A \Rightarrow^* z$. □

A fenti definícióból következik, hogy $L(G) \neq \emptyset$ akkor és csak akkor áll fenn, ha S termináló.

2.9. Lemma. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan. Ha $L(G) \neq \emptyset$, akkor megadható olyan $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan melyre $L(G) = L(G_1)$ és minden N_1-beli nemterminális termináló.

Bizonyítás. Először kiszámoljuk az N-beli termináló nemterminálisok U halmazát. U a következő iterációval határozható meg. Legyen

(i) Legyen $U_1 = \{A \in N \mid (\exists A \to x \in P)$ valamely $x \in \Sigma^*$-ra$\}$ és legyen $i = 1$.

(ii) Legyen $U_{i+1} = U_i \cup \{A \in N \mid (\exists A \to \alpha \in P)$ úgy, hogy $\alpha \in (U_i \cup \Sigma)^*\}$.

(iii) Ha $U_{i+1} = U_i$, akkor álljunk meg, különben legyen $i = i + 1$ és hajtsuk végre az (ii) lépést.

Megint csak könnyen igazolható, hogy minden $A \in N$-re, akkor és csakis akkor teljesül $A \Rightarrow_G^* z$ valamely $z \in \Sigma^*$-ra, ha van olyan i, hogy $A \in U_i$. (Az elegendőség most is i szerinti indukcióval bizonyítható, míg a szükségesség az $A \Rightarrow_G^* z$ levezetés lépéseinek száma szerinti indukcióval.) Továbbá az iterációs algoritmus terminál, mivel $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots N$, ezért van olyan i_0, hogy $U_{i_0} = U_{i_0+1}$. Az is könnyen látható, hogy ezen i_0-ra $U_{i_0+1} = U_{i_0+2} = \ldots$. A fentiekből következik, hogy $A \in U_{i_0}$, akkor és csakis akkor teljesül, ha A termináló, tehát az $U = U_{i_0}$ választás megfelelő lesz.

Melléktermékként kapjuk, hogy $L(G) \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $S \in U$.

Most megadjuk a G_1 nyelvtant. Ha $L(G) \neq \emptyset$ (tehát, ha $S \in U$), akkor legyen $N_1 = U$, álljon P_1 azon P-beli szabályokból, amelyek csak $(N_1 \cup \Sigma)$-beli szimbólumokat tartalmaznak, és legyen $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S)$.

Nyilvánvaló az, hogy minden N_1-beli nemterminális termináló. Azt kell még igazolni, hogy $L(G_1) = L(G)$, más szóval, hogy minden $x \in \Sigma^*$-ra, $S \Rightarrow_G^* x$ akkor és csakis akkor, ha $S \Rightarrow_{G_1}^* x$. Ha $S \Rightarrow_{G_1}^* x$, akkor $S \Rightarrow_G^* x$ is szükségszerűen teljesül, mivel $P_1 \subseteq P$. Fordítva, ha $S \Rightarrow_G^* x$, akkor valamennyi ebben a derivációban szereplő nemterminális termináló, tehát valamennyi ebben a derivációban szereplő szabály P_1-ben is ott van. Ezért $S \Rightarrow_{G_1}^* x$. □

A következőkben a nem elérhető szimbólumok kiszűrésével foglalkozunk.

2.10. Definíció. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan. Az $X \in (N \cup \Sigma)$ szimbólumról azt mondjuk, hogy *elérhető*, ha vannak olyan $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$-beli szavak, amelyekre $S \Rightarrow^* \alpha X \beta$. (Más szóval X elérhető, ha előfordul valamely mondatformában.) □

2.11. Lemma. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan. Ha Σ-ban van legalább egy elérhető terminális, akkor megkonstruálható olyan $G' = (N', \Sigma', P', S)$ környezetfüggetlen nyelvtan melyre $L(G) = L(G')$ és G'-nek minden szimbóluma elérhető.

Bizonyítás. Először kiszámoljuk az $(N \cup \Sigma)$-beli elérhető szimbólumok H halmazát. H a következő iterációval határozható meg. Legyen

(i) Legyen $H_0 = \{S\}$ és legyen $i = 0$.

(ii) Legyen $H_{i+1} = H_i \cup \{X \in (N \cup \Sigma) \mid (\exists A \to \alpha X \beta \in P)$ úgy, hogy $A \in H_i\}$.

(iii) Ha $H_{i+1} = H_i$, akkor álljunk meg, különben legyen $i = i + 1$ és hajtsuk végre az (ii) lépést.

Igazolható, hogy minden $X \in (N \cup \Sigma)$ esetén, X akkor és csakis akkor érhető el, ha van olyan i, hogy $X \in H_i$. Továbbá, az iterációs algoritmus terminál, mivel $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots (N \cup \Sigma)$, ezért van olyan i_0, hogy $H_{i_0} = H_{i_0+1}$. Ezen i_0-ra $H_{i_0+1} = U_{i_0+2} = \ldots$. A fentiekből következik, hogy $X \in H_{i_0}$, akkor és csakis akkor teljesül, ha X elérhető, tehát a $H = H_{i_0}$ választás megfelelő lesz.

Most megadjuk a G' nyelvtant. Legyen $N' = N \cap H$, $\Sigma' = \Sigma \cap H$ és álljon P' azon P-beli szabályokból, amelyek csak $(N' \cup \Sigma')$-beli szimbólumokat tartalmaznak. Amennyiben $\Sigma' \neq \emptyset$, legyen $G' = (N', \Sigma', P', S)$.

Nyilvánvaló az, hogy minden $(N' \cup \Sigma')$-beli szimbólum elérhető. Azt kell még igazolni, hogy $L(G') = L(G)$, vagyis, hogy minden $x \in \Sigma^*$-ra, $S \Rightarrow_G^* x$ akkor és csakis akkor, ha $S \Rightarrow_{G'}^* x$. Ha $S \Rightarrow_{G'}^* x$, akkor $S \Rightarrow_G^* x$ most is szükségszerűen teljesül, mivel $P' \subseteq P$. Fordítva, ha $S \Rightarrow_G^* x$, akkor valamennyi, ebben a derivációban szereplő szimbólum elérhető, tehát valamennyi, ebben a derivációban szereplő szabály P'-ben is ott van. Ezért $S \Rightarrow_{G'}^* x$. □

A termináló tulajdonságra és a szimbólumok elérhetőségére vonatkozó eredményeink kombinálásával kapjuk a következő tételt.

2.12. Tétel. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan. Ha $L(G) \neq \emptyset$ és Σ-ban van elérhető terminális, akkor megkonstruálható olyan $G' = (N', \Sigma', P', S)$ környezetfüggetlen nyelvtan melyre $L(G) = L(G')$ és G'-nek minden szimbóluma használható.

Bizonyítás. Először alkalmazzuk G-re az 2.9. Lemmában szereplő algoritmust. Ha $L(G) \neq \emptyset$, akkor konstruáljuk meg a G-vel ekvivalens $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S)$ nyelvtant, melynek minden nemterminálisa termináló.

Ezután alkalmazzuk a 2.11. Lemmában szereplő algoritmust G_1-re. Ha Σ-ban van legalább egy elérhető terminális (vagyis, ha $\Sigma \cap H \neq \emptyset$), akkor konstruáljuk meg $G' = (N', \Sigma', P', S)$ nyelvtant.

Állítjuk, hogy ez a nyelvtan eleget tesz a tételben szereplő feltételeknek. Valóban, az 2.9. és a 2.11. Lemmák miatt $L(G) = L(G_1) = L(G')$.

Azt is megmutatjuk, hogy G' minden szimbóluma használható. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van olyan $X \in (N' \cup \Sigma')$ szimbólum ami nem használható, vagyis nem léteznek olyan $x, y, z \in \Sigma'^*$ szavak, amelyekre $S \Rightarrow_{G'}^* xXz \Rightarrow_{G'}^* xyz$. Ez kétféleképpen lehetséges.

Egyrészt lehet úgy, hogy már az $S \Rightarrow_{G'}^* xXz$ deriváció sem teljesül semmilyen $x, y \in \Sigma'^*$-ra. Ugyanakkor, mivel G' minden szimbóluma (és így X is) elérhető, vannak olyan $\alpha, \beta \in (N' \cup \Sigma')$ szavak, melyekre $S \Rightarrow_{G'}^* \alpha X \beta$. Mivel G' definíciója miatt $P' \subseteq P_1$, az is igaz, hogy $S \Rightarrow_{G_1}^* \alpha X \beta$. Továbbá, mivel G_1-ben minden nemterminális termináló, vannak olyan $x', y' \in \Sigma^*$ szavak, melyekre $S \Rightarrow_{G_1}^* x'Xy'$. Viszont ebben a levezetésben szereplő valamennyi szimbólum elérhető, tehát $x', y' \in \Sigma'^*$ és $S \Rightarrow_{G'}^* x'Xy'$ is teljesülnek, ami ellentmond feltevésünknek. Így az első eset nem lehetséges.

Marad a második eset, vagyis amikor léteznek olyan $x, z \in \Sigma'^*$ szavak, amelyekre $S \Rightarrow_{G'}^* xXz$, de $X \Rightarrow_{G'}^* y$ nem teljesül semmilyen $y \in \Sigma'^*$-ra. Ez csakúgy lehet, ha

$X \in N'$ és X nem termináló G'-ben. Ugyanakkor, mivel G_1-ben minden nemterminális termináló, és $N' \subseteq N_1$, van olyan $y' \in \Sigma^*$ melyre $X \Rightarrow^*_{G_1} y'$. De ekkor a $P' \subseteq P_1$ feltétel miatt azt kapjuk, hogy $S \Rightarrow^*_{G_1} xXz \Rightarrow^*_{G_1} xy'z$. Mivel minden, ezen derivációban szereplő szimbólum elérhető, kapjuk, hogy $S \Rightarrow^*_{G'} xXz \Rightarrow^*_{G'} xy'z$, ami ellentmondás.

Összevetve azt kaptuk, hogy G' minden szimbóluma használható. □

2.13. Példa. Legyen G az alábbi szabályokból álló nyelvtan:

$$\begin{array}{lll} S & \to & A \mid B \\ A & \to & aB \mid bS \mid b \\ B & \to & AB \mid Ba \\ C & \to & AS \mid b. \end{array}$$

Konstruáljuk meg a G-vel ekvivalens azon G' nyelvtant, melynek minden szimbóluma használható!

Az 2.12. Lemmában szereplő algoritmust követve, először meghatározzuk G termináló nemterminálsait, az 2.9. Lemmában megadott módon. Kapjuk, hogy $U_1 = \{A, C\}$, $U_2 = \{S, A, C\}$, $U_3 = \{S, A, C\}$, tehát G-ben csak a B nem termináló. Csak azokat a szabályokat tartjuk meg, amelyekben S, A, C, a és b szerepelnek. Így kapjuk az alábbi G_1 nyelvtant

$$\begin{array}{lll} S & \to & A \\ A & \to & bS \mid b \\ C & \to & AS \mid b. \end{array}$$

Most az 2.11. Lemmában megadott módon kiszámoljuk az S-ből elérhető szimbólumokat. Ekkor $H_0 = \{S\}$, $H_1 = \{S, A\}$, $H_2 = \{S, A, b\}$, $H_3 = \{S, A, b\}$, tehát a G_1-ben elérhető szimbólumok S, A és b. Csak ezen szimbólumokból álló szabályokat megtartva kapjuk G'-t:

$$\begin{array}{lll} S & \to & A \\ A & \to & bS \mid b. \end{array}$$

□

2.1.4. A balrekurzió megszüntetése

2.14. Definíció. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan és legyen $A \in N$.

- Azt mondjuk, hogy A *közvetlenül balrekurzív G-ben*, ha P-ben van $A \to A\alpha$ alakú szabály.

- Továbbá, A *balrekurzív G-ben*, ha van olyan α szó, amelyre $A \Rightarrow^+ A\alpha$.

- Végül a G nyelvtan balrekurzív, ha tartalmaz legalább egy balrekurzív nemterminálist.

□

A fenti definícióból következik, hogy minden közvetlenül balrekurzív nemterminális egyúttal balrekurzív is. Például az aritmetikai kifejezéseket generáló G_{ar}:

- $K \to K + T$, $K \to T$,

- $T \to T * F$, $T \to F$,

- $F \to (K)$, $F \to a$

esetében a K nemterminális közvetlenül balrekurzív, és így G_{ar} is balrekurzív.

Tetszőleges G nyelvtan és A nemterminális esetén nyilvánvaló annak megállapítása, hogy A közvetlenül balrekurzív-e G-ben: csak meg kell nézni, hogy G-nek van-e $A \to A\alpha$ alakú szabálya. Annak eldöntése, hogy A balrekurzív-e már nem ilyen egyszerű, ugyanakkor nem is nehéz.

2.15. Lemma. Teteszőleges $G = (N, \Sigma, P, S)$ nyelvtan és $A \in N$ esetén eldönthető, hogy A balrekurzív-e G-ben.

Bizonyítás. Számoljuk ki a $H_A = \{B \in N \mid A \Rightarrow_G^+ B\gamma\}$ halmazt és nézzük meg, hogy $A \in H_A$ teljesül-e. H_A kiszámítása a következő iterációs algoritmussal történik:

1. Legyen $i = 0$ és $H_i = \{B \in N) \mid A \to B\alpha \in P\}$;
2. Legyen $H_{i+1} = H_i \cup \{B \in N \mid \exists (C \in H_i) : C \to B\alpha \in P\}$;
3. Ha $H_{i+1} = H_i$ akkor álljunk meg, különben legyen $i = i + 1$, és menjünk 2-re;

Nyilvánvaló annak igazolása, hogy az algoritmus véges lépés után $H_i = H_A$ mellett terminál. $\square$

Most kifejlesztünk egy olyan módszert, amellyel a balrekurzió kiküszöbölhető egy nyelvtanból anélkül, hogy az általa generált nyelv megváltozna.

Szükségünk lesz a következő lemmára.

2.16. Lemma. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan és legyen $A \to \alpha B\beta \in P$ (vagyis tekintsük G-nek egy olyan szabályát melynek jobb oldalában szerepel legalább egy nemterminális). Legyenek a B bal oldalú szabályok $B \to \gamma_1 \mid \ldots \mid \gamma_n$. Legyen

$$P' = (P - \{A \to \alpha B\beta\}) \cup \{A \to \alpha\gamma_1\beta, \ldots, A \to \alpha\gamma_n\beta\},$$

és $G = (N, \Sigma, P', S)$. Akkor $L(G) = L(G')$.

Bizonyítás. Az $L(G') \subseteq L(G)$ tartalmazás nyilvánvaló. Valóban, minden G'-beli levezetésben alkalmazott P'-beli szabály vagy P-ben is benne van, vagy $A \to \alpha\gamma_i\beta$ alakú, ahol $1 \le i \le n$. Ez utóbbi szabály alkalmazása azonban helyettesíthető az $A \Rightarrow_G \alpha B\beta \Rightarrow_G \alpha\gamma_i\beta$, két lépéses G-beli levezetéssel. Ilyen módon minden G'-beli levezetés szimulálható G-beli levezetéssel. A fordított irányú $L(G) \subseteq L(G')$ tartalmazást a következőképpen bizonyítjuk. Legyen $x \in L(G)$. Ekkor $S \Rightarrow_G^* x$. Ha ezen levezetésben nem alkalmaztuk az $A \to \alpha B\beta$ szabályt, akkor minden alkalmazott szabály P'-ben is benne van, tehát $S \Rightarrow_{G'}^* x$. Ellenkező esetben tekintjük $S \Rightarrow_G^* x$-ben az $A \to \alpha B\beta$ szabály legelső alkalmazását és felírjuk a levezetést

$$\begin{array}{lll}
S & \Rightarrow_G^* & \alpha_1 A\beta_1 \\
 & \Rightarrow_G & \alpha_1\alpha B\beta\beta_1 \qquad \text{(ez } A \to \alpha B\beta \text{ első alkalmazása)} \\
 & \Rightarrow_G^* & \alpha_1'\alpha' B\beta'\beta_1' \\
 & \Rightarrow_G & \alpha_1'\alpha'\gamma_i\beta'\beta_1' \qquad \text{(a } B \text{ helyettesítése)} \\
 & \Rightarrow_G^* & x_1'x'x_iy'y_1' = x
\end{array}$$

alakban. Ez a G-beli levezetés azonban helyettesíthető a következő levezetéssel:

$$\begin{array}{lll} S & \Rightarrow^*_{G'} & \alpha_1 A \beta_1 & \text{(eddig nem alkalmaztuk } A \to \alpha B \beta\text{-t)} \\ & \Rightarrow_{G'} & \alpha_1 \alpha \gamma_i \beta \beta_1 & \text{(mert } A \to \alpha \gamma_i \beta \in P'\text{)} \\ & \Rightarrow^*_{G} & \alpha'_1 \alpha' \gamma_i \beta' \beta'_1 & \\ & \Rightarrow^*_{G} & x'_1 x' x_i y' y'_1 = x. & \end{array}$$

Ezáltal egy olyan "vegyes" levezetést kaptunk melyben mind P mind P'-beli szabályok szerepelnek, ugyanakkor az $A \to \alpha B \beta$ szabályt eggyel kevesebbszer alkalmaztuk benne mint az eredeti levezetésben. A fenti eljárást iterálva (vagyis az $A \to \alpha B \beta$ szabálynak mindig a legelső alkalmazását tekintve) végül az x szónak egy olyan levezetését kapjuk, amelyben az $A \to \alpha B \beta$ szabály nem szerepel, tehát amely G'-beli. Következésképpen $x \in L(G')$. □

Amennyiben egy G' nyelvtan egy G nyelvtanból az 2.16. Lemmában leírt módon áll elő, akkor azt mondjuk, hogy G'-t 1 típusú transzformációval kapjuk G-ből. Az 1 típusú transzformáció tehát megőrzi a nyelvtan által generált nyelvet.

Az 1 típusú transzformáció akkor is működik, ha az $A \to \alpha B \beta$ szabályban $A = B$. Tegyük fel például, hogy az $A \to aAA$ szabály G-beli, és A alternatívái $A \to aAA \,|\, b$. Ekkor 1 típusú transzformációt hajtunk végre G-n, ha az $A \to aAA$ szabályt töröljük és helyette bevesszük az $A \to aaAAA \,|\, abA$ szabályokat. Az így kapott G'-ben az A bal oldalú szabályok tehát $A \to aaAAA \,|\, abA \,|\, b$ lesznek.

Most egy újabb transzformációt ismertetünk, amely a közvetlenül balrekurzív szimbólumok számának csökentésére irányul.

2.17. Lemma. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan, legyen $A \in N$ közvetlenül balrekurzív, és legyenek az A bal oldalú szabályok $A \to A\alpha_1 \,|\, \ldots \,|\, A\alpha_n \,|\beta_1 \,|\, \ldots \,|\, \beta_m$, ahol $\beta_1, \ldots, \beta_m$ egyike sem kezdődik A-val. Legyen

- $N_1 = N \cup \{A'\}$, ahol $A' \notin (N \cup \Sigma)$ egy új nemterminális,
- legyen $P_1 = (P - \{A \to A\alpha_1, \ldots, A \to A\alpha_n\}) \cup P'$, ahol
$$\begin{array}{lll} P' & = & \{A \to \beta_1 A', \ldots, A \to \beta_m A'\} \\ & \cup & \{A' \to \alpha_1 A', \ldots, A' \to \alpha_n A'\} \\ & \cup & \{A' \to \alpha_1, \ldots, A' \to \alpha_n\}. \end{array}$$
- és végül legyen $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S)$.

Akkor $L(G) = L(G_1)$ és A nem közvetlenül balrekurzív G-ben.

Bizonyítás. (Vázlat.) Az állítás második része nyilvánvaló. Az $L(G) = L(G_1)$ egyenlőség igazolásához elegendő megmutatni, hogy minden $C \in N$-re és $x \in \Sigma^*$-ra, $C \Rightarrow^*_{G,l} x$ akkor és csakis akkor, ha $C \Rightarrow^*_{G_1,l} x$.

Tegyük fel, hogy $C \Rightarrow^*_{G,l} x$. Ezen levezetésben szereplő, nem A-ra vonatkozó helyettesítések G_1-ben is elvégezhetők, mert a nem A bal oldalú szabályok P_1-ben is benne vannak. Az A nemterminálisból kiinduló rész-derivációk pedig

$$A \Rightarrow_{G,l} A\alpha_{i1} \Rightarrow_{G,l} \ldots \Rightarrow_{G,l} A\alpha_{ik} \ldots \alpha_{i1} \Rightarrow_{G,l} \beta_j \alpha_{ik} \ldots \alpha_{i1} \Rightarrow^*_{G,l} y_j x_{ik} \ldots x_{i1}$$

alakúak. Ez a rész-deriváció viszont helyettesíthető az

$$A \Rightarrow_{G_1,l} \beta_j A' \Rightarrow^*_{G_1,l} y_j A' \Rightarrow_{G_1,l} y_j \alpha_{ik} A' \Rightarrow^*_{G_1,l} y_j x_{ik} A' \Rightarrow_{G_1,l} \ldots \Rightarrow_{G_1,l} y_j x_{ik} \ldots \alpha_{i1} \Rightarrow^*_{G_1,l} y_j x_{ik} \ldots x_{i1}$$

G_1-beli derivációval. Így $C \Rightarrow^*_{G_1,l} x$ is teljesül. A formális bizonyítás a $C \Rightarrow^*_{G,l} x$ levezetés hossza szerinti indukcióval végezhető el. A megfordított irányú következtetés hasonlóan végezhető el. □

Amennyiben egy G_1 nyelvtan egy G nyelvtanból az 2.17. Lemmában leírt módon áll elő, akkor azt mondjuk, hogy G_1-et 2 típusú transzformációval kapjuk G-ből. A lemma szerint a 2 típusú transzformáció is megőrzi a nyelvtan által generált nyelvet, továbbá, eggyel csökkenti a nyelvtanban szereplő közvetlenül balrekurzív nemterminálisok számát. (Valóban, az 2.17. Lemmában szereplő G nyelvtanban A közvetlenül balrekurzív, de G_1-ben már nem, ugyanakkor A' pedig nem közvetlenül balrekurzív G_1-ben).

A 2 típusú transzformációra vonatkozó eredményekből azonnal adódik adódik a következő tétel.

2.18. Tétel. *Tetszőleges $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtanhoz megkonstruálható olyan $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan amely nem tartalmaz közvetlenül balrekurzív nemterminálisokat és amelyre $L(G) = L(G_1)$.*

Bizonyítás. G-ből kiindulva, addig alkalmazzuk a 2 típusú transzformációt, amíg el nem fogynak a közvetlenül balrekurzív nemterminálisok. □

Végül kimondhatjuk ezen rész fő eredményét.

2.19. Tétel. *Tetszőleges G környezetfüggetlen nyelvtanhoz konstruálható olyan G' nem balrekurzív környezetfüggetlen nyelvtan, amelyre $L(G) = L(G')$.*

Bizonyítás. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$. Hajtsuk végre a következő algoritmust.

(1) Az 2.18. Tételben szereplő módon küszöböljük ki G-ből a közvetlenül balrekurzív nemterminálisokat.

(2) Ha ezek után G-ben nem marad balrekurzív nemterminális, akkor készen vagyunk. (Megjegyezzük, hogy az 2.15. Lemma szerint ez a tulajdonsága G-nek algoritmikusan eldönthető.)

Ellenkező esetben vegyünk egy A nemterminálist amely balrekurzív G-ben. Legyenek az A bal oldalú szabályok $A \to \gamma_1 \,|\, \ldots \,|\gamma_n$. Mivel A nem közvetlenül balrekurzív, a $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ szavak egyike sem kezdődik A-val. Másrészt $A \Rightarrow^+_G A\alpha$, tehát P-ben lennie kell olyan $B \to A\beta$ szabálynak, melyre $B \neq A$. Vegyünk egy ilyen szabályt. Töröljük P-ből ezt a $B \to A\beta$ szabályt és vegyük be helyette a $B \to \gamma_1\beta \,|\, \ldots \,|\gamma_n\beta$ szabályokat. Ezáltal G-n egy 1 típusú transzformációt hajtunk végre, tehát a nyelvtan által generált nyelv nem változik.

Amennyeiben a fenti eljárást minden $B \to A\beta$ alakú szabályra elvégezzük, A nem lesz balrekurzív (mert A helyére mindig A alternatíváit helyettesítjük, amelyek nem A-val kezdődnek). Ezáltal csökkenteni tudtuk G rekurzív nemterminálisainak számát eggyel. Ugyanakkor az így kapott nyelvtanban újra lehetnek közvetlenül balrekurzív nemterminálisok (mert valamelyik γ_i kezdődhet B-vel). Ezért folytassuk az algoritmust az (1) pontban.

Belátható, hogy az algoritmus terminál és nem balrekurzív nyelvtant ad végeredményül. Ez amiatt van, mert az (1) pontban nem keletkeznek újabb balrekurzív nemterminálisok (ld. 2 típusú transzformáció), a (2) pont pedig mindig csökkenti a balrekurzív nemterminálisok számát. □

2.20. Példa. Legyen G a következő nyelvtan:

$$\begin{array}{lll} S & \to & BC \,|\, a \\ B & \to & CS \,|\, Sb \\ C & \to & SB \,|\, CC \,|\, a. \end{array}$$

Adjuk meg a G-vel ekvivalens nem balrekurzív nyelvtant.

1. lépés Megszüntetjük a közvetlen balrekurziót. Egyetlen közvetlen balrekurzív nemterminális van, a C. A 2 típusú transzformáció C-re történő alkalmazásával a következő nyelvtant kapjuk:

$$\begin{array}{lll} S & \to & BC \,|\, a \\ B & \to & CS \,|\, Sb \\ C & \to & SB \,|\, a \,|\, SBC' \,|\, aC' \\ C' & \to & C \,|\, CC' \end{array}$$

2. lépés A kapott nyelvtanban meghatározzuk a balrekurzív szimbólumokat. Az 2.19. Lemmában szereplő algoritmust alkalmazva kapjuk, hogy $H_S = H_B = H_C = \{B, C, S\}$, tehát mindhárom nemterminálisunk balrekurzív. Először S balrekurzivitását szüntetjük meg. Ehhez a $B \to Sb$, $C \to SB$ és $C \to SBC'$ szabályokra kell 1 típusú transzformációt alkalmazni (úgy, hogy mindhárom szabály esetében S helyére az alternatíváit helyettesítjük). Ekkor az alábbi nyelvtant kapjuk:

$$\begin{array}{lll} S & \to & BC \,|\, a \\ B & \to & CS \,|\, BCb \,|\, ab \\ C & \to & BCB \,|\, aB \,|\, a \,|\, BCBC' \,|\, aBC' \,|\, aC' \\ C' & \to & C \,|\, CC' \end{array}$$

Ezen nyelvtan esetében $H_S = \{B, C\}$, tehát S már nem balrekurzív. Ugyanakkor B közvetlenül balrekurzív lett, tehát a következő lépésben ezt kell megszüntetni.
3. lépés B közvetlenül balrekurzivitásának megszüntetése. A megfelelő 2 típusú transzformáció alkalmazásával a következő nyelvtant kapjuk.

$$\begin{array}{lll} S & \to & BC \,|\, a \\ B & \to & CS \,|\, ab \,|\, CSB' \,|\, abB' \\ B' & \to & Cb \,|\, CbB' \\ C & \to & BCB \,|\, aB \,|\, a \,|\, BCBC' \,|\, aBC' \,|\, aC' \\ C' & \to & C \,|\, CC' \end{array}$$

Most $H_B = H_C = \{B, C\}$, tehát mind B mind C balrekurzív. Az algoritmus B balrekurzivitásának megszüntetésével folytatódhat. A befejezést az olvasóra bízzuk. □

2.2. Környezetfüggetlen nyelvtanok normálformái

Először teszünk egy olyan észrevételt, melyre később szükségünk lesz.

2.21. Észrevétel. Vegyük a $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtant és az alábbi sorrendben futtassuk le rá a következő algoritmusokat:

- ε-mentesítés (2.5. Lemma)
- láncszabály mentesítés (2.2. Lemma)
- felesleges szimbólumok elhagyása (2.12. Lemma).

Ha az algoritmusokat a fenti sorrendben hajtjuk végre, akkor egyik algoritmus sem rontja el a nyelvtannak azt a tulajdonságát, amelyet az őt megelőző algoritmus eredményezett, ezért eredményül egy ε-mentes, láncszabály mentes nyelvtant kapunk, mely nem tartalmaz felesleges szimbólumokat.

□

(Megjegyezzük, hogy ez nem lenne igaz ha, például, először a láncszabály mentesítést majd utána az ε-mentesítést hajtanánk végre. Valóban, az ε-mentesítéssel újabb láncszabályok keletkezhetnek.)

2.2.1. Chomsky-normálalakra hozás

Ebben a fejezetben bevezetjük a Chomsky normálformájú környezetfüggetlen nyelvtan fogalmát és megmutatjuk, hogy minden G környezetfüggetlen nyelvtanhoz van vele ekvivalens Chomsky normálformájú környezetfüggetlen nyelvtan.

2.22. Definíció. Egy $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan *Chomsky-normálformájú* (vagy Chomsky normálalakban van), ha P-ben csak $S \to \varepsilon$, $A \to BC$ és $A \to a$ alakú szabályok vannak.

2.23. Tétel. *Minden $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtanhoz van vele ekvivalens Chomsky-normálformájú $G' = (N', \Sigma, P', S)$ környezetfüggetlen nyelvtan.*

Bizonyítás. A 2.21. Észrevétel értelmében feltehetjük, hogy G ε- és láncszabály mentes. Ezek után G'-t két lépésben konstruáljuk meg.

1. lépés: Megadunk egy $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S)$ nyelvtant, mely ekvivalens G-vel, és csak $S \to \varepsilon$, $A \to a$ és $A \to A_1 \dots A_n$ alakú szabályokat tartalmaz, ahol $a \in \Sigma$, $n \geq 2$ és $A, A_1, \dots, A_n \in N$. Evégett legyen

- $N_1 = N \cup \{a' \mid a \in \Sigma\}$
- P_1 a legszűkebb halmaz, amire a következők teljesülnek:
  - ha $S \to \varepsilon \in P$, akkor $S \to \varepsilon \in P_1$
  - ha $A \to a \in P$, akkor $A \to a \in P_1$
  - ha $A \to X_1 \dots X_n \in P$, ahol $n \geq 2$, akkor $A \to X_1' \dots X_n' \in P_1$, ahol $X_i' = \begin{cases} X_i, \text{ ha } X_i \in N \\ a', \text{ ha } X_i = a \in \Sigma \end{cases}$
  - minden $a \in \Sigma$-ra legyen $a' \to a \in P_1$.

Könnyű belátni, hogy $L(G_1) = L(G)$. Jelöljük evégett minden $w \in \Sigma^*$ esetén H_w-vel az összes olyan w' szó halmazát, melyeket úgy kapunk w-ből, hogy valamennyi (esetleg 0) benne szereplő $a \in \Sigma$ betűt a'-vel helyettesítünk.

Ekkor n szerinti indukcióval igazolható a következő állítás: minden $A \in N$ és $w \in \Sigma^*$ esetén

$$A \Rightarrow_G^n w \iff (\exists w' \in H_w) A \Rightarrow_{G'}^n w'.$$

Továbbá, nyilvánvaló, hogy minden $w' \in H_w$-re, $w' \Rightarrow_{G'}^{m} w$, ahol $m = |w|$. Következésképpen

$$S \Rightarrow_G^* w \iff (\exists w' \in H_w) S \Rightarrow_{G'}^* w' \Rightarrow_{G'}^* w,$$

tehát $L(G_1) = L(G)$.

2. lépés: Most megkonstruáljuk G_1-ből a kívánt $G' = (N', \Sigma, P', S)$ nyelvtant. Legyen P' a legszűkebb halmaz, amire az alábbiak teljesülnek:

- ha $S \to \varepsilon \in P_1$, akkor $S \to \varepsilon \in P'$,
- ha $A \to a \in P_1$, akkor $A \to a \in P'$,
- ha $A \to BC \in P_1$, akkor $A \to BC \in P'$,
- ha $A \to A_1 \ldots A_n$ $(n \geq 2)$ $\in P_1$, akkor

$$\begin{array}{rcll} A & \to & A_1\langle A_2 \ldots A_n\rangle, & (\dagger) \\ \langle A_2 \ldots A_n\rangle & \to & A_2\langle A_3 \ldots A_n\rangle, & \\ & \vdots & & \\ \langle A_{n-1}A_n\rangle & \to & A_{n-1}A_n & \end{array}$$

  ahol $\langle A_2 \ldots A_n\rangle, \ldots, \langle A_{n-1}A_n\rangle$ új nemterminálisok.

Legyen továbbá $N' = N \cup \{$ új nemterminálisok $\}$.

Nyilvánvaló, hogy G' Chomsky-normálalakban van. Azt kell még megmutatni, hogy $L(G') = L(G_1)$.

Ehhez elegendő megmutatni, hogy minden $A \in N$ és $w \in \Sigma^*$ esetén

$$A \Rightarrow_{G_1,l}^* w \iff A \Rightarrow_{G',l}^* w.$$

"$\Rightarrow$" bizonyítása: Tegyük fel, hogy $A \Rightarrow_{G_1,l}^m w$ valamely $m \geq 1$-re. m szerinti indikcióval megmutatjuk, hogy $A \Rightarrow_{G',l}^* w$.

Ha $m = 1$, akkor egyetlen P_1-beli szabályt alkalmaztunk, amely definíció szerint benne van P'-ben is, ezért $A \Rightarrow_{G',l}^m w$ is teljesül.

Ha $A \Rightarrow_{G_1,l}^{m+1} w$, akkor a levezetés felírható

$$A \Rightarrow_{G_1,l} A_1 \ldots A_n \Rightarrow_{G_1,l}^m w_1 \ldots w_n = w$$

alakban, ahol az $A \to A_1 \ldots A_n$ szabály P_1-ben van és minden $1 \leq i \leq n$-re $A_i \Rightarrow_{G_1,l}^{m_i} w_i$, valamely $m_i \leq m$-re. Így az indukciós feltevés miatt minden $1 \leq i \leq n$-re $A_i \Rightarrow_{G',l}^* w_i$ is teljesül.

Másrészt, ha $n = 2$, akkor az $A \to A_1A_2$ szabály P'-ben is benne van, tehát

$$A \Rightarrow_{G',l} A_1A_2 \Rightarrow_{G',l}^* w_1w_2 = w.$$

Ha viszont $n > 2$, akkor a fenti, $(\dagger)$-gal jelölt szabályok vannak P'-ben és ezért

$$\begin{array}{lll} A & \Rightarrow_{G',l} & A_1\langle A_2 \ldots A_n\rangle \qquad (\dagger\dagger) \\ & \Rightarrow^*_{G',l} & w_1\langle A_2 \ldots A_n\rangle \\ & \Rightarrow_{G',l} & w_1 A_2\langle A_3 \ldots A_n\rangle \\ & \Rightarrow^*_{G',l} & w_1 w_2\langle A_3 \ldots A_n\rangle \\ & & \ldots \\ & \Rightarrow^*_{G',l} & w_1 w_2 \ldots w_{n-2}\langle A_{n-1} A_n\rangle \\ & \Rightarrow_{G',l} & w_1 w_2 \ldots w_{n-2} A_{n-1} A_n \\ & \Rightarrow^*_{G',l} & w_1 w_2 \ldots w_{n-2} w_{n-1} w_n = w. \end{array}$$

"$\Leftarrow$" bizonyítása: Most tegyük fel, hogy $A \Rightarrow^m_{G',l} w$ valamely $m \geq 1$-re. m szerinti indikcióval megmutatjuk, hogy $A \Rightarrow^*_{G_1,l} w$. Lényegében az előző irányú bizonyítást fordítjuk meg.

Ha $m = 1$, akkor egyetlen P'-beli szabályt alkalmaztunk, amely definíció szerint benne van P_1-ben is, ezért $A \Rightarrow^m_{G_1,l} w$ is teljesül.

Ha $A \Rightarrow^{m+1}_{G_1,l} w$, akkor két eset lehetséges.

Az egyik, amikor a levezetés felírható $A \Rightarrow_{G',l} A_1 A_2 \Rightarrow^m_{G',l} w_1 w_2 = w$ alakban, ahol $A_1, A_2 \in N_1$. Ekkor az $A \to A_1 A_2$ szabály P_1-ben is benne van, mivel azokat változtatás nélkül vettük át. Másrészt, az indikciós feltevés miatt, $i = 1, 2$-re $A_i \Rightarrow^*_{G_1,l} w_i$, tehát $A \Rightarrow_{G_1,l} A_1 A_2 \Rightarrow^*_{G_1,l} w_1 w_2 = w$.

A másik eset, amikor az $A \Rightarrow^{m+1}_{G',l} w$ levezetés $(\dagger\dagger)$ alakban írható fel. Ekkor, ugyancsak definíció szerint az $A \to A_1 \ldots A_n$ szabály P_1-ben van. Másrészt, az indukció feltevés szerint minden $1 \leq i \leq n$-re $A_i \Rightarrow^*_{G_1,l} w_i$ is teljesül. Mindezt összevetve, kapjuk, hogy

$$A \Rightarrow_{G_1,l} A_1 \ldots A_n \Rightarrow^*_{G_1,l} w_1 \ldots w_n = w.$$

$\square$

2.2.2. Greibach normálalakra hozás

Ebben a fejezetben bevezetjük a Greibach normálformájú környezetfüggetlen nyelvtan fogalmát és megmutatjuk, hogy minden G környezetfüggetlen nyelvtanhoz van vele ekvivalens Greibach normálformájú környezetfüggetlen nyelvtan.

Előbb azonban felelevenítünk néhány, a parciálisan rendezett halmazokra vonatkozó fogalmat.

Egy A halmaz feletti $< \subseteq A \times A$ reláció *parciális rendezés*, ha irreflexív és tranzitív, azaz

- $\forall a \in A$-ra $a \not< a$ és
- $\forall a, b, c, \in A$-ra, ha $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$.

Ha $<$ parciális rendezés, akkor az $(A, <)$ párt *parciálisan rendezett halmaznak* nevezzük. A $<$ parciális rendezés *lineáris rendezés*, ha $\forall a, b \in A$-ra $a < b$ vagy $b < a$ vagy $a = b$ teljesül.

Közismert, hogy minden parciális rendezés beágyazható egy lineáris rendezésbe. Ez egy véges $(A, <)$ parciálisan rendezett halmaz esetében úgy is kimondható, hogy megadható A elemeinek egy olyan $a_1, \ldots, a_n$ felsorolása, hogy $\forall 1 \leq i, j \leq n$-re, ha $a_i < a_j$, akkor $i < j$.

2.24. Definíció. Egy $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan *Greibach-normálformájú* (vagy Greibach normálalakban van), ha P-ben bármely szabály $S \to \varepsilon$ vagy $A \to a\alpha$ alakú, ahol $\alpha \in N^*$.

2.25. Tétel. *Minden $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtanhoz van vele ekvivalens Greibach-normálformájú $G' = (N', \Sigma, P', S)$ környezetfüggetlen nyelvtan.*

Bizonyítás. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$, ε és láncszabálymentes nyelvtan, mely nem tartalmaz balrekurzív szimbólumokat. (Mindezt a 2.2. és 2.5. Lemmák és a 2.19. Tétel miatt az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük. A $G' = (N', \Sigma, P', S)$ nyelvtant ismét két lépésben adjuk meg.

1. lépés: Megadunk egy G-vel ekvivalens $G_1 = (N, \Sigma, P_1, S)$ nyelvtant, amiben minden szabály $S \to \varepsilon$ vagy $A \to a\alpha$ alakú, ahol $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$.

Definiáljuk evégett a $<$ relációt a nemterminálisok N halmaza felett a következőképpen: $\forall A, B \in N$-re $A < B \iff \exists \alpha :\ A \Rightarrow^+ B\alpha$.

Ez a $<$ reláció parciális rendezés, mert:

- irreflexív, mivel G nem tartalmaz balrekurzív szimbólumokat (lásd 2.14. Definíció),
- tranzitív, mivel ha $A \Rightarrow^+ B\alpha$ és $B \Rightarrow^+ C\beta$, akkor $A \Rightarrow^+ C\beta\alpha$.

Ágyazzuk be a $<$ relációt egy lineáris rendezésbe, vagyis adjuk meg N-nek egy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ felsorolását ami respektálja a $<$-t. Akkor ezen felsorolás rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- minden $1 \le i, j \le n$-re , $A_i \to A_j\alpha \in P$ esetén $i < j$ és
- minden $1 \le i \le n$-re és $A_i \to \gamma$ szabályra, $\gamma = \varepsilon$ vagy γ első betűje terminális vagy az $A_{i+1}, \ldots, A_n$ nemterminálisok valamelyike. (Tehát A_n minden alternatívája vagy ε vagy terminálissal kezdődik).

Alakítsuk át G-t a következőképpen.

Minden $i = n-1, \ldots, 1$-re

minden $j = i+1, \ldots, n$-re

minden $A_i \to A_j\alpha$ alakú szabályra hajtsunk végre 1-típusú transzformációt az $A_i \to A_j\alpha$ és az $A_j \to \gamma_1 | \ldots | \gamma_m$ szabályokkal, ahol $\gamma_1 | \ldots | \gamma_m$ az A_j összes alternatívái.

Vegyük észre, hogy a j szerinti ciklus lefutása után A_i minden alternatívája vagy ε vagy terminális betűvel kezdődik.

Ezért az i szerinti ciklus lefutása után egy olyan $G_1 = (N, \Sigma, P_1, S)$ nyelvtant kapunk, amelyen minden szabály $S \to \varepsilon$ vagy $A \to a\alpha$ alakú, ahol $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$. Továbbá, G_1 ekvivalens G-vel, hiszen az átalakítás során csak 1-típusú transzformációkat hajtottunk végre, melyek megőrzik a nyelvtan által generált nyelvet (lásd 2.16. Lemma).

2. lépés: Most G_1-ből kiindulva megkonstruáljuk a keresett $G' = (N', \Sigma, P', S)$ nyelvtant. Legyen evégett

- $N' = N_1 \cup \{a' \mid a \in \Sigma\}$,
- P' a legszűkebb olyan halmaz, amire teljesül, hogy
  - ha $S \to \varepsilon \in P_1$, akkor $S \to \varepsilon \in P'$,
  - ha $A \to aX_1 \dots X_m \in P_1$, akkor $A \to aX_1' \dots X_m' \in P'$, ahol
    $$X_i' = \begin{cases} X_i & \text{ha } X_i \in N \\ a' & \text{ha } X_i = a \in \Sigma, \end{cases}$$
  - minden $a \in \Sigma$-ra $a' \to a \in P'$.

Nyilvánvaló, hogy Greibach normálalakban van. Továbbá, $L(G') = L(G_1)$, ami ugyanúgy bizonyítható, mint a 2.23. Tétel első lépésében. □

Összefoglalás

Tetszőleges $G = (N, \Sigma, P, S)$ nyelvtan átalakítható vele ekvivalens

- Chomsky normálalakú $G' = (N', \Sigma, P', S)$ nyelvtanná (lásd 2.23. Tétel).
  ($L(G) = L(G')$ és minden szabály $S \to \varepsilon$, $A \to BC$ vagy$A \to a$ alakú.)
- Greibach normálalakú $G' = (N', \Sigma, P', S)$ nyelvtanná (lásd 2.23. Tétel).
  ($L(G) = L(G')$ és minden szabály $S \to \varepsilon$ vagy $A \to a\alpha$ alakú, ahol $\alpha \in N^*$.)

2.3. Parikh tétel

Jelöljük $\mathbb{N}$-nel a nemnegatív egész számok halmazát. Ebben a fejezetben központi szerepet játszanak majd az $\mathbb{N}$ feletti $n \geq 1$ dimenziós vektorok, melyek halmazát $\mathbb{N}^n$-nel jelöljük.

2.26. Definíció. Legyen $n \geq 1$ egy tetszőleges egész szám.

(1) Egy $S \subseteq \mathbb{N}^n$ halmaz *lineáris*, ha van olyan $k \geq 0$ és vannak olyan $t_0, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{N}^n$ vektorok, hogy $S = \{t_0 + \sum_{j=1}^{k} n_j t_j \mid n_j \geq 0\}$ (azaz S az összes $t_0 + n_1 t_1 + \dots + n_k t_k$ alakú vektorok halmaza).

(2) Egy $S \subseteq \mathbb{N}^n$ halmaz *féllineáris*, ha véges sok lineáris halmaz egyesítése. □

2.27. Definíció. Legyen Σ egy ábécé, és $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ az ábécé elemeinek egy a továbbiakban rögzített felsorolása.

(1) Tetszőleges $x \in \Sigma^*$-ra az x *a_i-hosszát* $|x|_{a_i}$-val jelöljük és értjük alatta az x-ben szereplő a_i-k számát (multiplicitással számolva).

(2) Definiáljuk a $par : \Sigma^* \to \mathbb{N}^n$ leképezést a következő módon: minden $x \in \Sigma^*$-ra $par(x) = (|x|_{a_1}, \dots, |x|_{a_n})$. A par függvényt *Parikh függvénynek*, $par(x)$-et az x *Parikh vektorának* nevezzük.

(3) $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv esetén $par(L) = \{par(x) \mid x \in L\}$.

(4) L_1 és L_2 nyelvek *betűekvivalensek*, ha $par(L_1) = par(L_2)$. □

2.28. Példa. Legyen $\Sigma = \{a,b\}$ és $x = abbab$. Akkor $|x|_a = 2$, $|x|_b = 3$ és $par(x) = (2,3)$. Az $L = \{a^nb^n \mid n \geq 0\}$ környezetfüggetlen nyelvre $par(L) = \{(0,0),(1,1),(2,2),\ldots\}$. Az $L' = \{(ab)^n \mid n \geq 0\}$ reguláris nyelvre $par(L') = \{(0,0),(1,1),(2,2),\ldots\}$. Tehát L és L' betűekvivalensek. □

Vegyük észre, hogy ha egy L nyelvből úgy állítunk elő egy L' nyelvet, hogy L bizonyos szavaiban (esetleg mindben) a betűk sorrendjét megváltoztatjuk (átrendezzük), akkor L és L' betűekvivalensek maradnak.

Azt szeretnénk megmutatni, hogy az előbbi példában szereplő jelenség általánosan is igaz, vagyis minden környezetfüggetlen nyelvhez megadható vele betűekvivalens reguláris nyelv. Evégett először bebizonyítjuk Parikh tételét. A bizonyítás előtt felidézzük, hogy egy A nemterminális szimbólum esetén D_A-val jelöljük az A gyökerű derivációs fák halmazát. Továbbá, tetszőleges $F \in D_A$ derivációs fa esetén $fr(F)$-fel jelöljük F határát, vagyis a leveleiről balról jobbra haladva leolvasható szimbólumokból alkotott szót.

2.29. Tétel. (Parikh tétele) *Ha L környezetfüggetlen nyelv, akkor $par(L)$ féllineáris.*

Bizonyítás. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan és $L = L(G)$.

Legyen $U \subseteq N$ úgy, hogy $S \in U$. Definiáljuk $L_U \subseteq \Sigma^*$ nyelvet a következőképpen: minden $x \in \Sigma^*$-ra $x \in L_U$ akkor és csak akkor, ha van olyan $F \in D_S$, melyre

- $fr(F) = x$ (azaz F határa x),
- F nemterminális csúcsai pontosan U elemeivel vannak címkézve oly módon, hogy U minden eleme fel van használva.

Akkor $L = \bigcup_{U \subseteq N, S \in U} L_U$. (Valóban, mindegyik $x \in L$-hez van olyan $U \subseteq N$ melyre $S \in U$ és $x \in L_U$, amit a következőképpen láthatunk be. Mivel $x \in L$, van egy olyan F derivációs fa, melynek gyökere S, határa pedig x. Legyen U azon nemterminálisok halmaza, melyek F csúcsaiban szerepelnek. Ekkor $x \in L_U$.)

Következésképpen $par(L) = \bigcup_{U \subseteq N, S \in U} par(L_U)$, tehát annak megmutatásához, hogy $par(L)$ féllineáris, elegendő igazolni, hogy tetszőleges (fix) U-ra $par(L_U)$ féllineáris.

Állítás Tetszőleges $U \subseteq N$-re, ahol $S \in U$ a $par(L_U)$ halmaz féllineáris.
Bizonyítás Legyen $||U|| = r$. Megadunk egy féllineáris K halmazt és megmutatjuk, hogy $K = par(L_U)$.

K megadásához bevezetünk további halmazokat.

(1) A $H \subseteq L_U$ nyelvet a következőképpen definiáljuk. Minden $x \in L_U$-ra, $x \in H$ akkor és csak akkor, ha az x L_U-hoz való tartozását igazoló $F \in D_S$ derivációs fa minden útján (gyökértől levélig), minden nemterminális legfeljebb $r+1$-szer fordul elő. Vegyük észre, hogy H véges.

(2) Minden $A \in U$-ra definiáljuk a $H_A \subseteq \Sigma^* A \Sigma^*$ nyelvet a következőképpen. Minden $x_1, x_2 \in \Sigma^*$-ra, $x_1Ax_2 \in H_A$ akkor és csak akkor, ha van olyan $F \in D_A$, hogy

- $fr(F) = x_1Ax_2$,

- F nemterminális csúcsai U elemeivel vannak címkézve (de nem követeljük meg, hogy U minden elemét fel is használjuk),
- F minden útján minden nemterminális legfeljebb $r+1$-szer fordul elő.

Észrevesszük, hogy minden A-ra H_A véges.

Legyen

$$par(H) = \{s_1, \ldots, s_k\}$$

és

$$\bigcup_{A \in U} par(\gamma(H_A)) = \{t_1, \ldots, t_l\},$$

ahol $\gamma(H_A) = \{\gamma(x_1 A x_2) \mid x_1 A x_2 \in H_A\}$ és $\gamma(x_1 A x_2) = x_1 x_2$. Legyen továbbá minden $1 \leq i \leq k$-ra

$$K_i = \{s_i + \sum_{j=1}^{l} n_j t_j \mid n_j \geq 0\}$$

és végül legyen

$$K = K_1 \cup \ldots \cup K_k.$$

Nyilvánvaló, hogy K féllineáris vektorhalmaz, mivel lineárisok halmazok egyesítése.

Megmutatjuk, hogy $par(L_U) = K$.

$K \subseteq par(L_U)$ bizonyítása:

Nyilvánvaló, hogy K a legszűkebb halmaz, amire igaz:

(i) $\forall 1 \leq i \leq k$-ra $s_i \in K$,

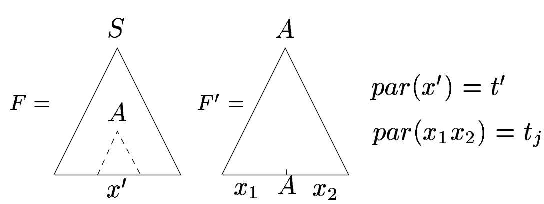
(ii) $\forall t \in K$-ra és $1 \leq j \leq l$-re $t + t_j \in K$.

K felépítése szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy minden $t \in K$-ra létezik $x \in L_U$, hogy $t = par(x)$.

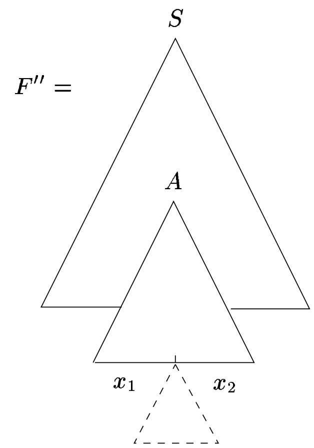
(i) Ha $t = s_i$, akkor létezik $x \in H$, hogy $par(x) = t$. Mivel $H \subseteq L_U$, $x \in L_U$ is teljesül.

(ii) Legyen $t = t' + t_j$. Az indukciós feltevés, hogy vany olyan $x' \in L_U$, melyre $par(x') = t'$. Akkor, az L_U definíciója miatt, létezik $F \in D_S$ derivációs fa úgy, hogy $fr(F) = x'$ és F nemterminális csúcsai pontosan az U elemeivel vannak címkézve. Másrészt létezik $A \in U$ és $x_1 A x_2 \in H_A$ úgy, hogy $par(\gamma(x_1 A x_2)) = par(x_1 x_2) = t_j$. Akkor, a H_A definíciója szerint, létezik $F' \in D_A$ úgy, hogy $fr(F') = x_1 A x_2$ és F' belső csúcsai U elemeivel vannak címkézve.

Mivel $x' \in L_U$, F pedig x' derivációs fája, F-nek van A-val címkézett csúcsa.



Konstruáljuk meg az F'' fát úgy, hogy F-ben egy A-val címkézett csúcs helyére az F' fát helyettesítjük.



Legyen $fr(F'') = x$. Ekkor $x \in L_U$, mivel F'' nemterminális csúcsai pontosan U elemeivel vannak címkézve. Másrészt $par(x) = par(x') + par(x_1x_2) = t' + t_j = t$, vagyis amit bizonyítani akartunk.

$par(L_U) \subseteq K$ bizonyítása:

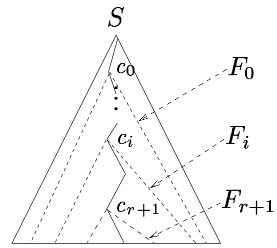
Megmutatjuk, hogy minden $x \in L_U$-hoz létezik $t \in K$, hogy $par(x) = t$.

Legyen evégett $x \in L_U$, akkor van olyan $F \in D_S$, melyre $fr(F) = x$ és F nemterminális csúcsai pontosan U elemeivel vannak címkézve. Két eset lehetséges.

1) F útjain (gyökértől levélig) minden nemterminális legfeljebb $(r+1)$-szer fordul elő. Ekkor $x \in H$, tehát valamely $1 \leq i \leq k$-ra $par(x) = s_i$. Mivel $s_i \in K$, így ez az eset kész van.

2) F-ben van olyan út, melyen valamely nemterminális $r + 1$-nél többször fordul elő. Ekkor F-ben vannak olyan $c_0, \ldots, c_{r+1}$ csúcsok, melyekre teljesülnek a következő feltételek.

- Minden $0 \leq i \leq r$-re c_{i+1} a c_i leszármazottja.
- $c_0, c_1, \ldots, c_{r+1}$ címkéje ugyanaz a nemterminális, melyet jelöljünk A-val,
- A c_0 gyökerű részfában (és így a $c_1, \ldots, c_{r+1}$ gyökerű részfákban is) minden úton minden nemterminális legfeljebb $r + 1$-szer fordul elő.

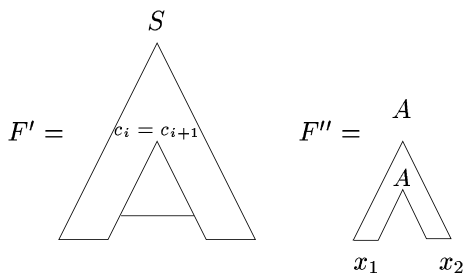


Legyenek $F_0, F_1 \dots, F_{r+1}$ rendre a $c_0, c_1, \dots, c_{r+1}$ gyökerű részfák és minden $1 \leq i \leq r+1$-re jelölje címke$(F_i) \subseteq N$ azon nemterminálisok halmazát, amelyek előfordulnak az F_i fában címkeként. Mivel minden $0 \leq i \leq r$-re F_{i+1} az F_i részfája, nyilvánvalóan teljesül a

$$\text{címke}(F_{r+1}) \subseteq \text{címke}(F_r) \subseteq \dots \subseteq \text{címke}(F_1) \subseteq U$$

tartalmazás. Mivel $||U|| = r$, így van olyan $1 \leq i \leq r$, hogy címke$(F_i) =$ címke(F_{i+1}).

Jelöljük F'-vel azt a fát, amit úgy kapunk F-ből, hogy benne azonosítjuk a c_i és c_{i+1} csúcsokat. Továbbá jelöljük F''-vel azt a fát, amit az F_i fából kapunk úgy, hogy töröljük belőle az F_{i+1} részfát, kivéve annak c_{i+1} gyökerét.



$fr(F') = x'$ $\qquad$ $fr(F'') = x_1 A x_2$

Mivel F_i-re is igaz, hogy benne minden úton minden nemterminális legfeljebb $r+1$-szer fordul elő, $fr(F'') \in H_A$. Tehát $par(x_1 x_2) = t_j$ valamilyen $1 \leq j \leq l$-re. Így

$$par(x) = par(x') + par(x_1 x_2) = par(x') + t_j$$

valamilyen $1 \leq j \leq l$-re

A továbbiakban két eset lehetséges:

2.1) F' útjain (gyökértől levélig) minden nemterminális legfeljebb $r+1$-szer fordul elő. Ekkor $x' \in H$ és ezért van olyan $1 \leq i \leq k$, hogy $par(x') = s_i$. Ekkor $par(x) = s_i + t_j \in K$.

2.2) Ha F' nem ilyen, akkor a 2)-ben leírt eljárást folytatva véges számú lépés után kapjuk, hogy

$$par(x) = s_i + \sum_{j=1}^{l} n_j t_j \in K.$$

□

2.30. Lemma. Minden $S \subseteq \mathbb{N}^n$ lineáris halmazhoz van olyan L reguláris nyelv, melyre $par(L) = S$.

Bizonyítás. Legyen S egy lineáris halmaz. Akkor léteznek olyan $t_0, \ldots, t_l \in \mathbb{N}^n$ vektorok, hogy $S = \{t_0 + \sum_{j=1}^{l} n_j t_j \mid n_1, \ldots, n_l \geq 0\}$.

Tegyük fel, hogy $t_j = (m_{j_1}, \ldots, m_{j_n})$, ahol $m_{j_1}, \ldots, m_{j_n} \in \mathbb{N}$ minden $0 \leq j \leq l$-re.

Legyen $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ egy n betűs ábécé és legyen minden $0 \leq j \leq l$-re x_j a következő szó:

$$x_j = a_1^{m_{j_1}} \ldots a_n^{m_{j_n}}.$$

Ekkor $par(x_j) = t_j$. Továbbá legyen

$$L = x_0(x_1)^* \ldots (x_l)^*$$

Nyilvánvaló, hogy L reguláris nyelv és megmutatható, hogy $par(L) = S$. Valóban, mivel – másképp felírva –

$$L = \{x_0(x_1)^{n_1} \ldots (x_l)^{n_l} \mid n_1, \ldots, n_l \geq 0\},$$

kapjuk, hogy

$$par(L) = \{t_0 + n_1 t_1 + \ldots + n_l t_l \mid n_1, \ldots, n_l \geq 0\} = S.$$

□

2.31. Lemma. Minden $S \subseteq \mathbb{N}^n$ féllineáris halmazhoz van olyan L reguláris nyelv, melyre $par(L) = S$.

Bizonyítás. Legyen $S = S_1 \cup \ldots \cup S_k$, ahol minden $1 \leq i \leq k$-re S_i lineáris. Akkor a 2.30. Lemma szerint minden $1 \leq i \leq k$-ra van olyan L_i reguláris nyelv, melyre $par(L_i) = S_i$.

Legyen $L = L_1 \cup \ldots \cup L_k$. Akkor L reguláris és $par(L) = par(L_1) \cup \ldots \cup par(L_k) = S_1 \cup \ldots \cup S_k = S$. □

A fenti két eredményt a következőképpen foglalhatjuk össze.

2.32. Tétel. *Tetszőleges $S \subseteq \mathbb{N}^n$-re a következő három állítás ekvivalens:*

(1) S féllineáris,

(2) $S = par(L)$, valamely L környezetfüggetlen nyelvre,

(3) $S = par(L)$, valamely L reguláris nyelvre.

Bizonyítás.

(1) ⇒ (3) 2.31. Lemma.

(3) ⇒ (2) Abból következik, hogy minden reguláris nyelv környezetfüggő is.

(2) ⇒ (1) 2.29. Tétel.

□

Két igen érdekes következmény.

2.33. Következmény. Minden L környezetfüggetlen nyelvhez van vele betűekvivalens reguláris nyelv.

Bizonyítás. Következik 2.32. Tételből. □

2.34. Következmény. A $\Sigma = \{a\}$ egybetűs ábécé feletti reguláris nyelvek megegyeznek ugyanezen ábécé feletti környezetfüggetlen nyelvekkel.

Bizonyítás. A 2.33. Következmény azt fejezi ki, hogy minden környezetfüggetlen nyelv szavaiban a betűk átrendezhetők úgy, hogy az átrendezés után reguláris nyelvet kapunk. Az egybetűs ábécé feletti szavak azonban nem változnak meg egy ilyen átrendezés után, tehát a nyelv ugyanaz marad. □

2.4. A Chomsky - Schützenberger tétel

Vegyük a

$$Z_n = \{ \overset{1}{[} \,, \overset{1}{]} \,, \ldots, \overset{n}{[} \,, \overset{n}{]} \},$$

n darab nyitó és záró zárójelből álló ábécét és a

$$G_n: \; S \to \overset{1}{[} \; S \; \overset{1}{]} \; \Big| \; \ldots \; \Big| \; \overset{n}{[} \; S \; \overset{n}{]} \; \Big| \; SS \; \Big| \; \varepsilon$$

környezetfüggetlen nyelvtant. Legyen $P_n = L(G_n)$ a Z_n-ből készíthető szabályos zárójelezések halmaza.

A környezetfüggetlen nyelvek strukturájára vonatkozóan a következő eredményt bizonyítjuk be.

2.35. Tétel. *Minden $L \subseteq \Sigma^*$ környezetfüggetlen nyelvhez van olyan $n \geq 1$, $R \subseteq (Z_n)^*$ reguláris nyelv, $h: Z_n^* \to \Sigma^*$ homomorfizmus, hogy $L = h(P_n \cap R)$.*

Bizonyítás. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan és legyen $L = L(G)$. Az általánosság megszorítás nélkül feltehetjük, hogy G Chomsky normálalakban van (lásd 2.23. Tétel).

Definiáljuk a $G' = (N, \Gamma, P', S)$ nyelvtant, ahol

- $\Gamma = \{ \overset{1}{\underset{\pi}{[}} \,, \overset{1}{\underset{\pi}{]}} \,, \overset{2}{\underset{\pi}{[}} \,, \overset{2}{\underset{\pi}{]}} \; \Big| \; \pi \in P \}.$

- P' a legszűkebb szabályhalmaz, amelyre

  1) ha $\pi = A \to BC \in P$, akkor $A \to \overset{1}{\underset{\pi}{[}} B \overset{1}{\underset{\pi}{]}} \overset{2}{\underset{\pi}{[}} C \overset{2}{\underset{\pi}{]}} \in P'$,

  2) ha $\pi = A \to a \in P$, akkor $A \to \overset{1}{\underset{\pi}{[}} \overset{1}{\underset{\pi}{]}} \overset{2}{\underset{\pi}{[}} \overset{2}{\underset{\pi}{]}} \in P'$.

(Vegyük észre, hogy Γ tekinthető egy Z_n ábécének, pontosabban, van olyan n, hogy Γ és Z_n között bijekció létesíthető.)
Vegyük $L(G')$ nyelvet. Észrevételek:

- $L(G') \subseteq P_\Gamma$ (ahol P_Γ a Γ-ból készíthető szabályos zárójelezések halmaza).
- Van olyan $h : \Gamma^* \to \Sigma^*$ homomorfizmus, melyre $h(L(G')) = L(G)$. Valóban, a következő h leképezés homomorfizmussá való kiterjesztése ilyen:
  - minden $\pi = A \to BC$ szabály esetén

$$h(\overset{1}{\underset{\pi}{[}}) = h(\overset{1}{\underset{\pi}{]}}) = h(\overset{2}{\underset{\pi}{[}}) = h(\overset{2}{\underset{\pi}{]}}) = \varepsilon,$$

  - minden $\pi = A \to a$ szabály esetén

$$h(\overset{1}{\underset{\pi}{[}}) = a,\ h(\overset{1}{\underset{\pi}{]}}) = h(\overset{2}{\underset{\pi}{[}}) = h(\overset{2}{\underset{\pi}{]}}) = \varepsilon.$$

Kérdés, hogy van-e olyan R reguláris nyelv, melyre $P_\Gamma \cap R = L(G')$?
Általánosabban, legyen $A \in N$-re $L(G', A) = \{z \in \Gamma^* \mid A \Rightarrow^*_{G'} z\}$. Ekkor nyilvánvalóan $L(G', A) \subseteq P_\Gamma$ is teljesül. Keressünk egy R_A reguláris nyelvet, melyre $L(G', A) = P_\Gamma \cap R_A$.
Ehhez megvizsgáljuk, hogy milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie egy $z \in P_\Gamma$ szónak, hogy $z \in L(G', A)$ is teljesüljön.
Könnyen belátható, hogy az alábbi öt tulajdonság szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy $z \in P_\Gamma$ szóra $z \in L(G', A)$ is teljesüljön:

1) z-ben minden $\pi \in P$ esetén $\overset{1}{\underset{\pi}{]}}$ után $\overset{2}{\underset{\pi}{[}}$ következik,

2) z-ben minden $\pi \in P$-re a $\overset{2}{\underset{\pi}{]}}$ után nincs balzárójel,

3) z-ben $\pi = A' \to B'C' \in P$ esetén $\overset{1}{\underset{\pi}{[}}$ után $\overset{1}{\underset{\rho}{[}}$ jön, ahol ρ B' baloldalú szabály, $\overset{2}{\underset{\pi}{[}}$ után $\overset{1}{\underset{\sigma}{[}}$ jön, ahol σ C' baloldalú szabály,

4) z-ben minden $\pi = A' \to a \in P$ szabály esetén $\overset{1}{\underset{\pi}{[}}$ után $\overset{1}{\underset{\pi}{]}}$ és $\overset{2}{\underset{\pi}{[}}$ után $\overset{2}{\underset{\pi}{]}}$ következik,

5) z $\overset{1}{\underset{\pi}{[}}$-vel kezdődik, ahol π A baloldalú szabály.

Megadunk öt reguláris nyelvet, melyek metszetei megadják R_A-t.

1) G_1:

$S \to aS \mid \varepsilon$, ahol $a \in \Gamma - \{ \overset{1}{\underset{\pi}{]}} \mid \pi \in P\}$,

$S \to \overset{1}{\underset{\pi}{]}} \, \overset{2}{\underset{\pi}{[}} S$, minden $\pi \in P$-re.

$L_1 = L(G_1)$ reguláris nyelv.

2) G_2 :

$S \to aS \mid \varepsilon$, ahol $a \in \Gamma - \{ \overset{2}{\underset{\pi}{]}} \mid \pi \in P\}$,

$S \to \overset{2}{\underset{\pi}{]}} A$, minden $\pi \in P$-re.

$A \to \overset{2}{\underset{\pi}{]}} A \mid \ \overset{1}{\underset{\pi}{]}} S \mid \varepsilon$, minden $\pi \in P$-re.

$L_2 = L(G_2)$ reguláris nyelv.

3) G_3:

$S \to aS \mid \varepsilon$, ahol $a \in \Gamma - \{ \overset{1}{\underset{\pi}{[}}, \overset{2}{\underset{\pi}{[}} \mid \pi = A' \to B'C',\ \pi \in P\}$,

$S \to \overset{1}{\underset{\pi}{[}} X_\pi$, ahol $\pi = A' \to B'C'$,

$X_\pi \to \overset{1}{\underset{\rho}{[}} X_\rho$, ahol $\pi = A' \to B'C',\ \rho = B' \to D'E'$,

$X_\pi \to \overset{1}{\underset{\rho}{[}} S$, ahol $\pi = A' \to B'C',\ \rho = B' \to a$,

$S \to \overset{2}{\underset{\pi}{[}} Y_\pi$, ahol $\pi = A' \to B'C'$,

$Y_\pi \to \overset{1}{\underset{\sigma}{[}} X_\sigma$, ahol $\pi = A' \to B'C',\ \sigma = C' \to D'E'$,

$Y_\pi \to \overset{1}{\underset{\sigma}{[}} S$, ahol $\pi = A' \to B'C',\ \sigma = C' \to a$.

$L_3 = L(G_3)$ reguláris nyelv.

4) G_4 :

$S \to aS \mid \varepsilon$, ahol $a \in \Gamma - \{ \overset{1}{\underset{\pi}{[}}, \overset{2}{\underset{\pi}{[}} \mid \pi = A' \to a,\ \pi \in P\}$,

$S \to \overset{1}{\underset{\pi}{[}}\ \overset{1}{\underset{\pi}{]}} S$, ahol $\pi = A' \to a$,

$S \to \overset{2}{\underset{\pi}{[}}\ \overset{2}{\underset{\pi}{]}} S$, ahol $\pi = A' \to a$.

$L_4 = L(G_4)$ reguláris nyelv.

5) G_5 :

$S \to \overset{1}{\underset{\pi}{[}} A$, ahol $\pi = A \to BC$ vagy $\pi = A \to a$,

$A \to aA \mid \varepsilon$, ahol $a \in \Gamma$.

$L_5 = L(G_5)$ reguláris nyelv.

Legyen $R_A = L_1 \cap \ldots \cap L_5$, ami nyilvánvalón reguláris nyelv. Állítjuk, hogy $L(G', A) = P_\Gamma \cap R_A$, vagyis

$$\forall x \in \Gamma^* :\ A \Rightarrow^*_{G'} x \iff x \in P_\Gamma \cap R_A.$$

A következőkben bebizonyítjuk ezt az állítást.
$\Rightarrow$ irány: Teljesül az öt tulajdonság megadása miatt
$\Leftarrow$ irány: $|x|$ szerinti indukcióval.

i) $x = \overset{1}{\underset{\pi}{[}}\ \overset{1}{\underset{\pi}{]}}\ \overset{2}{\underset{\pi}{[}}\ \overset{2}{\underset{\pi}{]}}$ és $\pi = A \to a$ alakú. (a legrövidebb szó $P_\Gamma \cap R_A$-ban, ennek hossza 4)

Tehát $A \to \overset{1}{\underset{\pi}{[}}\ \overset{1}{\underset{\pi}{]}}\ \overset{2}{\underset{\pi}{[}}\ \overset{2}{\underset{\pi}{]}} \in P'$, és így $A \Rightarrow_{G'} x$.

ii) $x = \overset{1}{\underset{\pi}{[}}\, y\, \overset{1}{\underset{\pi}{]}}\ \overset{2}{\underset{\pi}{[}}\, z\, \overset{2}{\underset{\pi}{]}}$, $\pi = A \to BC$,

$y \in P_\Gamma \cap R_B$ és $z \in P_\Gamma \cap R_C$, mivel az 1)-5) feltételek teljesülnek.

Az indukciós feltevés szerint: $B \Rightarrow^*_{G'} y$ és $C \Rightarrow^*_{G'} z$.

G' konstrukciója szerint $A \to \overset{1}{\underset{\pi}{[}}\, B\, \overset{1}{\underset{\pi}{]}}\ \overset{2}{\underset{\pi}{[}}\, C\, \overset{2}{\underset{\pi}{]}} \in P'$

$$\begin{aligned} \text{Tehát } A \ &\Rightarrow_{G'} \overset{1}{\underset{\pi}{[}}\, B\, \overset{1}{\underset{\pi}{]}}\ \overset{2}{\underset{\pi}{[}}\, C\, \overset{2}{\underset{\pi}{]}} \in P' \\ &\Rightarrow^*_{G'} \overset{1}{\underset{\pi}{[}}\, y\, \overset{1}{\underset{\pi}{]}}\ \overset{2}{\underset{\pi}{[}}\, z\, \overset{2}{\underset{\pi}{]}} = x \qquad \text{(indukciós feltevés szerint).} \end{aligned}$$

Tehát $L(G', S) = P_\Gamma \cap R_S$ $(L(G', S) = L(G'))$, és $L(G) = h(L(G')) = h(P_\Gamma \cap R_S)$.

□

2.5. Környezetfüggetlen nyelvek fixpont jellemzése

2.5.1. Parciálisan rendezett halmazok

Egy $\leq \subseteq A \times A$ reláció *parciális rendezés*, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, azaz $\forall a \in A$-ra $a \leq a$, $\forall a, b \in A$-ra, ha $a \leq b$ és $b \leq a$, akkor $a = b$ és $\forall a, b, c \in A$-ra, ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$. Ha $\leq$ parciális rendezés, akkor az $(A, \leq)$ párt parciálisan rendezett halmaznak nevezzük.

2.36. Megjegyzés. A parciálisan rendezett halmaz fenti definíciója ekvivalens a 2.2.2 alfejezetben megadott definícióval. Könnyen igazolható ugyanis a következő két állítás.

1) Legyen $< \subseteq A \times A$ parciálisan rendezés a 2.2.2 alfejezetben megadott definíció szerint. Akkor $\leq \subseteq A \times A$ parciális rendezés a fenti értelemben, ahol $\forall a, b \in A$ esetén $a \leq b$ akkor és csak akkor, ha $a < b$ vagy $a = b$.

2) Legyen $\leq \subseteq A \times A$ parciálisan rendezés a jelen alfejezetben megadott definíció szerint. Akkor $< \subseteq A \times A$ parciális rendezés a 2.2.2 alfejezetben megadott definíció értelemében, ahol $\forall a, b \in A$ esetén $a < b$ akkor és csak akkor, ha $a \leq b$ és $a \neq b$.

□

Ebben az alfejezetben tehát a parciálisan rendezésnek a most megadott definícióját használjuk. Továbbá, azt mondjuk, hogy

- $a < b$, ha $a \leq b$ és $a \neq b$ és
- $b > a$, ha $a < b$.

2.37. Definíció. Legyen $(P, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz és $A \subseteq P$. Egy $a \in A$ elem az A *legkisebb eleme*, ha minden $b \in A$-ra $a \leq b$.

2.38. Lemma. (A legkisebb elem unicitása.) Ha $(P, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz és $A \subseteq P$, akkor A-nak legfeljebb egy legkisebb eleme van.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $a, a' \in A$ legkisebb elemek. Ekkor $a \leq a'$, mert a legkisebb elem és $a' \leq a$, mert a' is legkisebb elem. Mivel $\leq$ antiszimmetrikus, kapjuk, hogy $a = a'$. □

2.39. Definíció. Legyen $(P, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz és $A \subseteq P$. Ekkor

- $a \in P$ az A egy *felső korlátja*, ha $\forall b \in A$-re $b \leq a$,
- A felső korlátjainak a halmazát $UB(A)$-val jelöljük,
- Ha $UB(A)$-nak van legkisebb eleme, akkor azt A *legkisebb felső korlátjának* nevezzük és $\vee A$-val jelöljük.

A 2.38. lemmából következik, hogy ha $\vee A$ létezik, akkor az egyértelműen meghatározott.

2.40. Példa. Legyen H egy halmaz, $\mathcal{P}(H)$ pedig a H összes részhalmazainak a halmaza. Ekkor $(\mathcal{P}(H), \subseteq)$ parciálisan rendezett halmaz. Legyen továbbá $A \subseteq \mathcal{P}(H)$. Akkor $\vee A = \bigcup_{X \in A} X$ az A legkisebb felső korlátja, ami a következőképpen látható be.

Mivel minden $X \in A$-re $X \subseteq \vee A$, ezért $\vee A$ az A felső korlátja.

Most indirekt bizonyítással belátjuk, hogy $\vee A$ a legkisebb felső korlát. Tegyük fel az ellenkezőjét, vagyis, hogy

van olyan $Y \in UB(A)$, melyre $\vee A \not\subseteq Y$.

Akkor van olyan $x \in \vee A$, melyre $x \notin Y$,

akkor van olyan $X \in A$ és $x \in X$, melyre $x \notin Y$,

akkor van olyan $X \in A$, melyre $X \not\subseteq Y$,

tehát Y nem felső korlátja A-nak, ami ellentmondás.

□

2.41. Definíció. Legyen $(P, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz.

- Ha $a_1, a_2, \ldots$ P-beli sorozat esetén létezik $\vee\{a_1, a_2, \ldots\}$, akkor ezt $\vee a_n$-nel jelöljük.
- Egy $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ alakú P-beli sorozatot *P-beli felszálló láncnak* nevezünk.

□

2.42. Definíció. Egy $(P, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz *teljes*, ha

- van legkisebb eleme,
- minden $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ P-beli felszálló lánc esetén létezik $\vee a_n$.

2.43. Példa.

- $(\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}, \leq)$ nem teljes, mert nincs legkisebb eleme
- $(\{0, 1, 2, \ldots\}, \leq)$ nem teljes, mert nincs minden felszálló láncnak felső korlátja,
- $(\{0, 1, 2, \ldots, \infty\}, \leq)$ teljes, ahol minden n-re $n \leq \infty$.
- $([0, 1), \leq)$ nem teljes, mert bár létezik legkisebb eleme, de például az $1 - 1/n$ felszálló láncnak nem létezik a halmazhoz tartozó felső korlátja.
- $([0, 1], \leq)$ teljes.

Most egy olyan példát adunk teljes parciálisan rendezett halmazra, melyet a későbbiekben intenzíven felhasználunk.

Legyen Σ egy ábécé és $k \geq 1$ egy természetes szám. Tekintsük a

$$(\mathcal{P}(\Sigma^*))^k = \{(L_1, \ldots, L_k) \mid L_i \subseteq \Sigma^*\}$$

halmazt és vezessük be rajta a $\leq$ rendezést a következő módon. Bármely két $(L_1, \ldots, L_k)$ és $(L'_1, \ldots, L'_k)$ elem esetén

$$(L_1, \ldots, L_k) \leq (L'_1, \ldots, L'_k) \iff \forall 1 \leq i \leq k: \ L_i \subseteq L'_i.$$

Akkor a $(\mathcal{P}(\Sigma^*)^k, \leq)$ parciálisan rendeztt halmaz teljes, mert

- legkisebb eleme $(\emptyset, \ldots, \emptyset)$,
- minden $(L_1^{(n)}, \ldots, L_k^{(n)}), n \geq 1$ felszálló lánc esetén

$$\vee(L_1^{(n)}, \ldots, L_k^{(n)}) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} L_1^{(n)}, \ldots, \bigcup_{n=1}^{\infty} L_k^{(n)}).$$

□

2.44. Definíció. Legyenek $(A, \leq)$ és $(B, \leq)$ parciálisan rendezett halmazok és legyen $f: A \to B$ egy leképezés.

a) f *monoton*, ha $\forall a, b \in A$-ra ha $a \leq b$, akkor $f(a) \leq f(b)$.

b) Tegyük fel, hogy A, B teljesek. f *folytonos*, ha minden $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ A-beli felszálló lánc esetén $\vee f(a_n)$ létezik, és

$$f(\vee a_n) = \vee f(a_n).$$

□

Vegyük észre, hogy a folytonosság definíciója emlékeztet a valós függvények folytonosságát definiáló

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

képletre.

Azonnal adódik a következő észrevétel.

2.45. Lemma. Legyenek $(A, \leq)$ és $(B, \leq)$ teljes parciálisan rendezett halmazok és $f: A \to B$ egy folytonos leképezés. Akkor f monoton.

Bizonyítás. Legyen $a, b \in A$ és $a \leq b$. Megmutatjuk, hogy $f(a) \leq f(b)$.

Tekintsük evégett az $a \leq b \leq b \leq \ldots$ A-beli felszálló láncot. Ennek a legkisebb felső korlátja nyilván b. Mivel f folytonos, $f(b) = \vee\{f(a), f(b)\}$. Másrészt, definíció szerint, $f(a) \leq \vee\{f(a), f(b)\} = f(b)$, tehát $f(a) \leq f(b)$. □

2.46. Lemma. Legyen $(P, \leq)$ teljes parciálisan rendezett halmaz, $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ és $b_1 \leq b_2 \leq \ldots$ két felszálló lánc P-ben. Tegyük fel, hogy $\forall i \exists j$, hogy $a_i \leq b_j$, valamint $\forall i \exists j$, hogy $b_i \leq a_j$. Akkor $\vee a_n = \vee b_n$.

Bizonyítás. Legyen $i \geq 1$ tetszőleges egész szám. A feltétel szerint van olyan j, hogy $a_i \leq b_j$. Mivel $b_j \leq \vee b_n$, kapjuk, hogy $a_i \leq \vee b_n$. Mivel i tetszőleges, ezért minden i-re $a_i \leq \vee b_n$, tehát $\vee a_n \leq \vee b_n$.

Hasonlóan lehet megmutatni, hogy $\vee b_n \leq \vee a_n$-t. Mivel $\leq$ antiszimmetrikus, kapjuk, hogy $\vee a_n = \vee b_n$. □

2.47. Definíció. Legyen $(P, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz és $f : P \to P$ egy leképezés. Egy $c \in P$ elem az f *fixpontja*, ha $f(c) = c$.

Minden $n \geq 0$-ra az $f^{(n)} : A \to A$ leképezést a következőképpen definiáljuk. Minden $a \in A$-ra $f^{(0)}(a) = a$, és $f^{(n+1)}(a) = f(f^{(n)}(a))$.

□

Most már be tudjuk bizonyítani az alfejezet fő eredményét.

2.48. Tétel. *(Kleene fixpont tétele.) Legyen $(P, \leq)$ teljes parciálisan rendezett halmaz és $f : P \to P$ folytonos leképezés. Akkor $\vee f^{(n)}(\perp)$ az f legkisebb fixpontja, ahol $\perp$ az A legkisebb eleme.*

Bizonyítás. Legyen $a_0 = \perp, a_1 = f(\perp), \ldots, a_n = f^{(n)}(\perp), \ldots$. Ekkor $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \ldots$ egy felszálló lánc, mert

$$
\begin{array}{llll}
a_0 = \perp & \leq & f(a_0) = a_1 & \text{(mert } \perp \text{ a } P \text{ legkisebb eleme)} \\
a_1 = f(a_0) & \leq & f(a_1) = a_2 & \text{(mert } f \text{ folytonos, és így monoton)} \\
\quad\vdots & & &
\end{array}
$$

Megmutatjuk, hogy $f(\vee a_n) = \vee a_n$, vagyis, hogy $\vee a_n$ az f fixpontja. (Vegyük észre, hogy n most 0-tól indul.) Mivel f folytonos, így

$$f(\vee a_n) = \vee f(a_n) = \vee \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

Továbbá, az $a_0 \leq a_1 \leq \ldots$ és az $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ felszálló láncokra teljesülnek a 2.46. lemma feltételei. Következésképpen, $\vee a_n = \vee \{a_1, a_2, \ldots\}$ és így $f(\vee a_n) = \vee a_n$, vagyis $\vee a_n$ az f fixpontja.

Végül megmutatjuk, hogy $\vee a_n$ az f legkisebb fixpontja. Evégett tegyük fel, hogy c az f egy további fixpontja. Akkor $\perp \leq c$, mivel $\perp$ a P legkisebb eleme. Akkor f monotonitása miatt minden n-re $f^{(n)}(\perp) \leq f^{(n)}(c) = c$. Következésképpen $\vee f^{(n)}(\perp) \leq c$. Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

2.5.2. Folytonos leképezések $(\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ felett

Folytonos függvények zártsági tulajdonságai:

Most bevezetünk két függvényműveletet, majd megmutatjuk, hogy a folytonos függvények zártak ezekre a műveletekre. A továbbiakban Σ egy ábécé, $k \geq 1$ pedig egy egész szám.

2.49. Definíció. Legyenek $f, g : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ függvények. Akkor az $f+g$ és fg függvényeket a következőképpen definiáljuk. Minden $(L_1, \ldots, L_k) \in (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ esetén:

(a) $(f+g)(L_1, \ldots, L_k) = (f(L_1) \cup g(L_1), \ldots, f(L_k) \cup g(L_k))$ és

(b) $(fg)(L_1, \ldots, L_k) = (f(L_1)g(L_1), \ldots, f(L_k)g(L_k))$.

2.50. Lemma. Ha az $f, g : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ függvények folytonosak, akkor $f+g$ és fg is folytonosak.

Bizonyítás. Először az (a) esetet bizonyítjuk. Legyenek $f, g : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ folytonos függvények és legyen $(L_1^{(n)}, \ldots, L_k^{(n)})$ egy $(\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$-beli felszálló lánc. Akkor

$$
\begin{aligned}
& (f+g)(\vee(L_1^{(n)}, \ldots, L_k^{(n)})) \\
= \; & f(\vee(L_1^{(n)}, \ldots, L_k^{(n)})) \cup g(\vee(L_1^{(n)}, \ldots, L_k^{(n)})) \\
& (f+g \text{ definíciója}) \\
= \; & \left(\vee f(L_1^{(n)}, \ldots, L_k^{(n)})\right) \cup \left(\vee g(L_1^{(n)}, \ldots, L_k^{(n)})\right) \\
& (\text{mert } f \text{ és } g \text{ folytonosak}) \\
= \; & \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(L_1^{(n)}, \ldots, L_k^{(n)})\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} g(L_1^{(n)}, \ldots, L_k^{(n)})\right) \\
& (\text{legkisebb felső korlát } (\mathcal{P}(\Sigma^*))\text{-ban}) \\
= \; & \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(f(L_1^{(n)}, \ldots, L_k^{(n)}) \cup g(L_1^{(n)}, \ldots, L_k^{(n)})\right) \\
= \; & \bigcup_{n=1}^{\infty} (f+g)(L_1^{(n)}, \ldots, L_k^{(n)}) \\
& (f+g \text{ definíciója}) \\
= \; & \vee (f+g)(L_1^{(n)}, \ldots, L_k^{(n)}) \\
& (\text{legkisebb felső korlát } (\mathcal{P}(\Sigma^*))\text{-ban}),
\end{aligned}
$$

tehát $f+g$ is folytonos függvény. A (b) eset bizonyítása hasonlóan végezhető el. □

2.51. Definíció. Legyen $k \geq 1$ és $f : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ egy leképezés. Tetetszőleges $1 \leq i \leq k$-re f_i-vel jelöljük és f *i-edik komponensének nevezzük* azt a függvényt, melyre minden $(L_1, \ldots, L_k) \in (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ esetén $f_i(L_1 \ldots, L_k)$ az $f(L_1 \ldots, L_k)$ vektor i-edik komponense.

Érvényes lesz a következő.

2.52. Észrevétel. Tetszőleges $k \geq 1$ és $f : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ leképezés esetén f akkor és csak akkor folytonos, ha minden $1 \leq i \leq k$-re f_i folytonos.

Bizonyítás. Gyakorlat.

Most bevezetünk néhány olyan folytonos leképezést $(\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ felett, melyekre a továbbiakban szükségünk lesz.

1) Projekciók:

Legyen $1 \leq i \leq k$. Az i-edik k-változós projekció az a $\pi_i^{(k)} : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ függvény, melyre minden $(L_1, \ldots, L_k) \in (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ esetén

$$\pi_i^{(k)}(L_1, \ldots, L_k) = L_i.$$

Könnyen igazolható, hogy a projekciók folytonos leképezések.

2) Konstans függvények:

Legyen $w \in \Sigma^*$. Ekkor $f_w : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ az a függvény, melyre minden $(L_1, \ldots, L_k) \in (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ esetén

$$f_w(L_1, \ldots, L_k) = \{w\}.$$

Nyilvánvaló, hogy a konstans függvények folytonosak.

3) Szófüggvények:

Legyenek $X_1, \ldots, X_k$ olyan változók, melyek nem szerepelnek Σ-ban és legyen $w \in (\Sigma \cup \{X_1, \ldots, X_k\})^*$. Ekkor az $f_w : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ függvényt a következőképpen definiáljuk. Legyen $w = w_0 X_{i_1} w_1 \ldots X_{i_n} w_n$, valamely $n \geq 0$-ra és legyen minden $(L_1, \ldots, L_k) \in (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ esetén

$$f_w(L_1, \ldots, L_k) = \{w_0 u_{i_1} w_1 \ldots u_{i_n} w_n \mid u_j \in L_j, 1 \leq j \leq k\},$$

tehát $f_w = f_{w_0} \pi_{i_1}^{(k)} f_{w_1} \ldots \pi_{i_n}^{(k)} f_{w_n}$. Következésképpen f_w folytonos, mivel előáll a konstans függvényekből és a projekciókból a szorzás művelettel és a 2.50. lemma szerint a folytonos függvények zártak a szorzás műveletre.

4) Egyenletrendszerek:

Legyenek ismét $X_1, \ldots, X_k$ olyan változók, melyek nem szerepelnek Σ-ban. Σ^* *feletti k változós egyenletrendszernek* (ha k nem lényeges, akkor csak egyenletrendszernek) nevezzük az E-vel jelölt alábbi formális rendszert:

$$\begin{aligned} X_1 &= w_{11} + \ldots + w_{1n_1} \\ &\vdots \\ X_k &= w_{k1} + \ldots + w_{kn_k}, \end{aligned}$$

ahol $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ és minden $1 \leq i \leq k$ és $1 \leq j \leq n_i$ estén $w_{ij} \in (\Sigma \cup \{X_1, \ldots, X_k\})^*$. E meghatároz egy $f_E : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ leképezés, melyet a következőképpen definiálunk. Minden $1 \leq i \leq k$-re legyen $f_i = f_{w_{i1}} + \ldots + f_{w_{in_i}}$ és minden $(L_1, \ldots, L_k) \in (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ esetén legyen

$$f_E(L_1, \ldots, L_k) = (f_1(L_1, \ldots, L_k), \ldots, f_k(L_1, \ldots, L_k)).$$

A fentiekből következik, hogy minden $1 \leq i \leq k$-re legyen f_i folytonos, így f_E is folytonos, mivel minden komponense folytonos, lásd 2.52. észrevétel.

2.5.3. Kapcsolat a környezetfüggetlen nyelvtanok és a Σ^* feletti k változós egyenletrendszerek között

a) Környezetfüggetlen nyelvtanhoz egyenletrendszer rendelése

Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan. Tegyük fel, hogy $N = \{X_1, \ldots, X_k\}$ és $X_1 = S$. Ekkor P felírható a következő alakban:

$$\begin{array}{lcl} X_1 & \to & w_{11}|\ldots|w_{1n_1} \\ & \vdots & \\ X_k & \to & w_{k1}|\ldots|w_{kn_k} \end{array}$$

G-hez hozzárendeljük az alábbi $E(G)$ egyenletrendszert:

$$\begin{array}{lcl} X_1 & = & w_{11} + \ldots + w_{1n_1} \\ & \vdots & \\ X_k & = & w_{k1} + \ldots + w_{kn_k} \end{array}$$

Ekkor $f_{E(G)} : \mathcal{P}(\Sigma^*)^k \to \mathcal{P}(\Sigma^*)^k$ folytonos függvény. Továbbá, a G által generált nyelv és $E(G)$ legkisebb fixpontja között a következő összefüggés van.

2.53. Tétel. *Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan. Akkor $\vee f^{(n)}_{E(G)}((\emptyset, \ldots, \emptyset))$ i-edik komponense megegyezik $L(G, X_i) = \{w \in \Sigma^* \mid X_i \Rightarrow^*_G w\}$-vel. Speciálisan az első komponense egyenlő $L(G)$-vel.*

Bizonyítás.

2.54. Példa. Tekinstük a G :

$$\begin{array}{lcl} S & \to & A \mid B \\ A & \to & aAb \mid ab \\ B & \to & bBa \mid ba \end{array}$$

nyelvtant. Akkor $E(G)$ a következő egyenletrendszer lesz:

$$\begin{array}{lcl} S & = & A + B \\ A & = & aAb + ab \\ B & = & bBa + ba, \end{array}$$

tehát $f_E(G) : \mathcal{P}(\Sigma^*)^3 \to \mathcal{P}(\Sigma^*)^3$. A 2.48. tétel szerint $f_E(G)$ legkisebb fixpont $\vee f^{(n)}_E((\emptyset, \emptyset, \emptyset))$, ahol

$$\begin{array}{lcl} f^{(0)}_E((\emptyset, \emptyset, \emptyset)) & = & (\emptyset, \emptyset, \emptyset) \\ f^{(1)}_E((\emptyset, \emptyset, \emptyset)) & = & (\emptyset, \{ab\}, \{ba\}) \\ f^{(2)}_E((\emptyset, \emptyset, \emptyset)) & = & (\{ab, ba\}, \{aabb, ab\}, \{bbaa, ba\}) \\ & \vdots & \end{array}$$

Továbbá,

$$\vee f_E^{(n)}((\emptyset,\emptyset,\emptyset)) = (\underbrace{\{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w\}}_{\parallel\; L(G)}, \{w \in \Sigma^* \mid A \Rightarrow^* w\}, \{w \in \Sigma^* \mid B \Rightarrow^* w\})$$

b) Egyenletrendszerhez környezetfüggetlen nyelvtan rendelése

Legyen E :

$$\begin{aligned} X_1 &= w_{11} + \ldots + w_{1n_1} \\ &\vdots \\ X_k &= w_{k1} + \ldots + w_{kn_k} \end{aligned}$$

Σ^* feletti k-változós egyenletrendszer. E-hez hozzárendeljük a $G(E) = (N, \Sigma, P, S)$ nyelvtant, ahol

- $N = \{X_1, \ldots, X_k\}$
- $S = X_1$
- $P = \{X_i \to w_{ij} | 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq n_i\}$

2.55. Tétel. Legyen E egy Σ^* fölötti egyenletrendszer. Akkor $\vee f_E^{(n)}((\emptyset, \ldots, \emptyset))$ i-edik komponense megegyezik $L(G(E), X_i) = \{w \in \Sigma^* \mid X_i \Rightarrow^*_{G(E)} w\}$-vel. Speciálisan az első komponense egyenlő $L(G(E))$-vel.

Bizonyítás. $G(E)$-hez rendeljük hozzá az egyenletrendszert úgy, ahogy az a) pontban le van írva. Ekkor a kiindulási E egyenletrendszert kapjuk. $E(G(E)) = E$. Így az állítás következik a 2.53. tételből . □
Bebizonyítottuk a következő tételt.

2.56. Tétel. *Tetszőleges $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvre a következő két állítás ekvivalens:*

1) L környezetfüggetlen nyelv.

2) L egy Σ^* feletti egyenletrendszer legkisebb fixpontjának valamelyik komponense.

Bizonyítás. Következik a 2.53. és 2.55. tételekből. □

Hivatkozások

[AU72] A. V. Aho, J. D. Ullman, *The Theory of Parsing, Translation and Compiling I.,II.*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.

[Br89] J. G. Brookshear, *Theory of Computation – Formal Langauges, Automata, and Complexity*, The Benjamin-Cummings Publishing Company, 1989.

[CL89] J. Carroll, D. Long, *Theory of Finite Automata*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.

[Ge92] Gécseg Ferenc, Automaták és formális nyelvek, kézirat, JATE, 1992.

[Fü99] Fülöp Zoltán, Formális nyelvek és szintaktikus elemzésük, SZTE Polygon Kiadó, 1999.

[Ha78] M. A. Harrison, *Introduction to Formal Language Theory*, Addison Wesley, 1978.

[HA79] J. E. Hopcroft, A. V. Aho, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, Addison Wesley, 1979.

[Ke95] D. Kelley, *Automata and Formal Languages*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995.

[Ko97] D. Kozen, *Automata and Computability*, Springer-Verlag, Ney York, 1997.

[MAK88] R. N. Moll, M. A. Arbib, A. J. Kfoury, *An Introduction to Formal Language Theory*, Springer Publishing Company, 1988.

[Sa73] A. Salomaa, *Formal Languages*, Academic Press, 1973

[SR97] A. Salomaa, G. Rozenberg (Editors), *The Handbook of Formal Langauges, I.,II.*, Springer Publishing Company, 1997.

[St94] H. Straubing, *Finite Automata, Formal Logic, and Circuit Complexity*, Birkhäuser, 1994.